

Mariusz BORKOWSKI¹

ZASTOSOWANIE BEZPOŚREDNIEJ METODY TREFFTZA-KUPRADZE W ZAGADNIENIU HIERARCHICZNEGO SZACOWANIA MACIERZY POJEMNOŚCI

Artykuł prezentuje algorytm hierarchicznego szacowania pojemności resztkowych dla planarnych układów ścieżek przewodzących. W pracy wykorzystano bezpośrednią metodę brzegową Trefftza-Kupradze. Wyprowadzono ją z odwrotnego sformułowania wariacyjnego co umożliwiło jej wspólny opis (dyskretyzacja brzegu, interpolacja funkcji pola i strumienia, tworzenie równań całkowo-brzegowych), a także porównanie z powszechnie używaną metodą elementów brzegowych. Rozważania ograniczono do zagadnień dwuwymiarowych, a geometria badanych struktur jest dyskretyzowana przy pomocy hierarchicznego podziału binarnego. Dla każdego z podobszarów-liści, przy wykorzystaniu wybranej metody, tworzone są równania całkowo-brzegowe dla równania Laplace'a, z których uzyskuje się tzw. macierze pojemności brzegowych. W procesie hierarchicznego przechodzenia w górę binarnego drzewa podziału łączy się macierze pojemności brzegowych dla coraz to większych obszarów, aż do obszaru-korzenia odpowiadającego pojedynczej warstwie dielektryka, a następnie całej struktury. Łączenie to przeprowadza się przy pomocy dopełnienia Schura. Przekształcenie ostatecznej macierzy pojemności brzegowych pozwala uzyskać macierz pojemności wzajemnych układu przewodników. Binarny podział rozważanych geometrii umożliwia stworzenie biblioteki macierzy pojemności brzegowych i wykorzystanie zapamiętanych elementów w razie ich ponownego wystąpienia w strukturze w celu przyspieszenia działania algorytmu. Przy pomocy stworzonego algorytmu eksperymentalnie przebadano wpływ odległości odsuniętych węzłów kolokacji (charakterystycznych dla metody Trefftza-Kupradze) na uzyskiwane rezultaty, w wyniku czego ustalono quasi-optymalną wartość wykorzystywaną na dalszym etapie obliczeń. Otrzymane wyniki odniesiono do rozwiązań analitycznych oraz rezultatów obliczeń programu Linpar (metoda momentów).

Słowa kluczowe: pojemności pasożytnicze, bezpośrednie metody brzegowe, metoda elementów brzegowych, układy ścieżek planarnych

¹ Mariusz Borkowski, Politechnika Rzeszowska, Pracownia Akustyki, al. Powstańców Warszawy 12, 35-959 Rzeszów, +48 17 865 1074, marbor@prz.edu.pl.

1. Wprowadzenie

Szacowanie parametrów elementów resztkowych w planarnych strukturach mikroelektronicznych dla różnych układów i konfiguracji struktur przewodzących jest zagadnieniem rozważanym w literaturze naukowej już od wielu lat [4,13,19]. Niezerowe wartości parametrów elementów resztkowych w układach ścieżek są przyczyną szeregu problemów przy transmisji sygnałów elektrycznych szybkozmiennych i o dużych częstotliwościach. Największy problem techniczny oszacowania parametrów elementów resztkowych występuje w przypadku resztkowych pojemności. Trudności te wynikają z niejednorodności elektromagnetycznej struktury planarnej uwarunkowanej obecnością podłoża dielektrycznego.

Rozwiązanie analityczne rozpatrywanego zagadnienia jest możliwe jedynie dla szczególnych, prostych konfiguracji, dlatego też w większości przypadków stosuje się metody numeryczne ([15,23]), w tym coraz częściej metody brzegowe (MB). Stosowane techniki brzegowe to głównie odmiany metody elementów brzegowych (MEB) w postaci tak pośredniej jak i bezpośredniej [7].

Pionierskim zastosowaniem bezpośredniej odmiany MEB do szacowania pojemności resztkowych było [11]. Pomysł ten był następnie kontynuowany, co doprowadziło do powstania szeregu metod opartych na bezpośredniej MEB [2,3,9,12,22].

Z przeglądu literatury, dokonanego przez autora, wynika natomiast, że brak jest prac wykorzystujących brzegowe metody Trefftza (MT). Ich przewaga nad najpopularniejszą MEB przejawia się w braku osobliwości równań całkowo-brzegowych, co skutkuje prostszą implementacją oraz mniejszymi błędami szacowania całek. Metody te zostały omówione bardziej szczegółowo m.in. w pracach [6,8,16,18], a jedną z nich jest metoda Trefftza-Kupradze w wersji bezpośredniej [1,14,20].

Celem artykułu jest prezentacja stworzonego algorytmu hierarchicznego szacowania pojemności opartego na bezpośredniej metodzie Trefftza-Kupradze oraz zbadanie wpływu parametrów tej metody na podstawie porównania wyników otrzymanych omawianą metodą z rozwiązaniami analitycznymi, rezultatami uzyskanymi przy pomocy MEB oraz aplikacji Linpar [10].

2. Sformułowanie problemu

Dla układu $N_n > 2$ przewodników ładunek Q_m zgromadzony na m -tym przewodniku wyraża się równaniem:

$$Q_m = \sum_{n=1}^{N_n} C_{mn} u_n \quad m = 1, 2, \dots, N_n \quad (1)$$

gdzie u_n – napięcie n -tego przewodnika względem masy układu, C_{mn} ($m \neq n$) – pojemność wzajemna przewodnika m -tego względem n -tego, C_{mm} – pojemność własna.

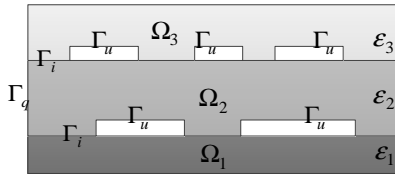
Dla N_n przewodników równanie można zapisać macierzowo:

$$\mathbf{Q} = \mathbf{C}\mathbf{u} \quad (2)$$

przy czym $\mathbf{C} = [C_{mn}]_{N_n \times N_n}$, $\mathbf{u} = [u_1, \dots, u_{N_n}]^T$, $\mathbf{Q} = [Q_1, \dots, Q_{N_n}]^T$.

Macierz \mathbf{C} nazywana jest w literaturze uogólnioną macierzą pojemności [21] (GCM – generalized capacitance matrix). Jest ona kwadratowa i symetryczna względem przekątnej głównej.

Rozważając rzeczywisty układ ścieżek (Rys. 1) obliczenie GCM komplikuje fakt występowania strefowych niejednorodności materiałowych obszaru zagadnienia, co rodzi konieczność uwzględnienia zjawisk związanych z zachowaniem się pola elektrycznego na granicy ośrodków. W przypadku metod brzegowych, w takich sytuacjach obszar dzieli się na podobszary Ω_k jednorodne materiałowo.



Rys. 1. Zagadnienie Laplace'a dla planarnej konfiguracji ścieżek przewodzących w strukturze trójwarstwowej

Fig. 1. Laplace boundary value problem for planar conducting paths placed in multilayer structure

Dla każdego podobszaru tworzy się równania całkowo-brzegowe. Na granicy podobszarów należy uwzględnić warunki ciągłości, a układy równań, opisujące poszczególne podobszary są ze sobą łączone i powstaje jeden globalny układ równań. W ten sposób problem wyznaczania pojemności resztkowych można rozpatrywać jako zagadnienie pola elektrostatycznego w obszarze pozbawionym ładunków. Ten typ zjawisk opisywany jest równaniem Laplace'a dla zagadnień wewnętrznych, który można zdefiniować następująco

$$\varepsilon_k \nabla^2 u = \varepsilon_k \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) = 0 \quad (3)$$

$$u = \bar{u} \text{ na } \Gamma_u \quad (4)$$

$$q = \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = \bar{q} \text{ na } \Gamma_q \quad (5)$$

$$\varepsilon_a q_a + \varepsilon_b q_b = 0, \quad u_a = u_b \text{ na } \Gamma_i \quad (6)$$

gdzie, ε_k to stała dielektryczna charakteryzująca dany k -ty dielektryk, u, q – szukane wartości odpowiednio potencjału i jego pochodnej normalnej na brzegu, Γ_u to części brzegu z określonym potencjałem (przewodniki), Γ_i – brzeg będący granicą pomiędzy dwoma sąsiadującymi ze sobą obszarami o indeksach a i b , Γ_q – zewnętrzny brzeg struktury z nałożonym jednorodnym warunkiem Neumanna.

3. Bezpośrednie metody brzegowe

Wstawiając do równania (3) rozwiązanie przybliżone u , otrzyma się residuum. Przemnożenie przez funkcję wagową w i scałkowanie po obszarze Ω da w rezultacie sformułowanie wariacyjne zagadnienia klasycznego. Dwukrotne zastosowanie twierdzenia Greena oraz uwzględnienie warunków brzegowych pozwoli na otrzymanie odwrotnego sformułowania wariacyjnego

$$\int_{\Omega} u \nabla^2 w d\Omega - \int_{\Gamma} u \frac{\partial w}{\partial \mathbf{n}} d\Gamma + \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} w d\Gamma = 0 \quad (7)$$

Wzór ten jest wzorem wyjściowym do bezpośrednich MB. Aby z równania (7) otrzymać równanie całkowo-brzegowe wymagane jest pozbycie się pierwszej całki. Można tego dokonać poprzez odpowiedni wybór funkcji wagowej. Wybór ten determinuje jednocześnie wersję bezpośredniej MB.

Użycie rozwiązania podstawowego G^* , które dla dwuwymiarowego zagadnienia Laplace'a wynosi

$$G^*(\mathbf{r}, \mathbf{r}_\mu) = -\ln(\mathbf{r} - \mathbf{r}_\mu)/(2\pi) \quad (8)$$

pozwoli na opisanie potencjału pola w dowolnym punkcie opisanym wektorem wodzącym \mathbf{r}_μ jako wpływu potencjałów warstw pojedynczej i podwójnej rozmieszczonych na brzegu $\Gamma(\mathbf{r})$ (gdzie \mathbf{r} to wektor wodzący punktu leżącego na brzegu):

$$c_\mu u(\mathbf{r}_\mu) = -\int_{\Gamma} u \frac{\partial G^*}{\partial \mathbf{n}} d\Gamma + \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} G^* d\Gamma \quad (9)$$

W zależności od położenia rozważanego punktu współczynnik $c_\mu = c_\mu(\mathbf{r}_\mu)$ przyjmuje wartości:

$$c_\mu(\mathbf{r}_\mu) = \begin{cases} 1 & \Leftrightarrow \mathbf{r}_\mu \in \Omega \\ \beta/(2\pi) & \Leftrightarrow \mathbf{r}_\mu \in \Gamma \\ 0 & \Leftrightarrow \mathbf{r}_\mu \notin \Omega \end{cases} \quad (10)$$

gdzie β – kąt płaski, pod jakim z punktu \mathbf{r}_μ widać lokalnie obszar Ω . Przyjmując, że źródła rozmieszczone są na brzegu Γ wzór (9) stanowi punkt wyjścia do standardowej bezpośredniej MEB.

3.1. Bezpośrednia metoda Trefftza-Kupradze (MTK)

W [17] Kupradze w celu uniknięcia osobliwości w rozwiązaniu pośrednią MEB umieścił źródła na pomocniczym brzegu leżącym na zewnątrz obszaru zagadnienia. Wzorując się na tym pomysłe i stosując go w odwrotnym sformułowaniu wariacyjnym można uzyskać kolejną metodę bezpośrednią, znaną w literaturze pod wieloma nazwami (regularna bezpośrednia MEB, metoda rozwiązań podstawowych, bezpośrednia metoda Trefftza-Kupradze).

W tym celu zakłada się, że punkty kolokacji \mathbf{r}_μ leżą poza obszarem Ω . Ponieważ dla takich punktów współczynnik $c_\mu = 0$ równanie (9) upraszcza się do:

$$-\int_{\Gamma} u \frac{\partial G^*}{\partial \mathbf{n}} d\Gamma + \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} G^* d\Gamma = 0 \quad (11)$$

Metoda ta unika osobliwości, które są charakterystyczne dla standardowej MEB, jednak wprowadza dodatkowy parametr, który wymaga ustalenia. Jest nim położenie brzegu pomocniczego (w przypadku wersji pośredniej), lub punktów kolokacji (dla bezpośredniej MTK). Znaczenie ma kształt i odległość pomocniczego konturu od rzeczywistego brzegu Γ . W algorytmie opisywanym w tej pracy, rozważania ograniczono do założenia, że punkty kolokacji są odsuwane od Γ o jednakową (dla każdego podobszaru) odległość λ wzdłuż wektora normalnego w miejscach położenia węzłów kolokacji, a ich ilość jest równa ilości węzłów kolokacji. Tak więc, parametrem, który będzie miał wpływ na wyniki obliczeń, będzie λ , a ustalenie jego właściwej wartości będzie głównym celem dalszych rozważań.

3.2. Dyskretyzacja brzegu i oraz macierzowa postać równań całkowo-brzegowych

Obliczenie całek w (9) czy (11) wymaga podziału brzegu Γ na N_j elementów brzegowych.

$$\Gamma = \bigcup_j \Gamma_j \quad j=1,2,\dots,N_j \quad (12)$$

Każdy element brzegowy jest opisywany wektorem wodzącym położenia punktu $\mathbf{r}(\xi) = [x(\xi), y(\xi)]$, zależnego od parametru $\xi = [-1,1]$. Geometrię elementu można wtedy wyrazić przy pomocy stosownych funkcji interpolujących np. wielomianów Serendipa:

$$\mathbf{r}(\xi) = \sum_k \mathbf{r}_k^j S_k^j(\xi) \quad (13)$$

gdzie ξ – współrzędna unormowana z przedziału $[-1,1]$, S_k^j – k -ty wielomian interpolacyjny (funkcja kształtu) na j -tym elemencie, x_k^j, y_k^j – współrzędne k -tego węzła geometrii na j -tym elemencie. Brak górnego indeksu przy znaku sumy podkreśla to, że w ogólności różne elementy brzegowe mogą być aproksymowane wielomianami różnych stopni.

W związku z dyskretyzacją brzegu $\Gamma(\mathbf{r}(\xi))$, funkcje $u = u(\mathbf{r})$ i $q = q(\mathbf{r})$ również wyrażone zostaną w funkcji parametru ξ na każdym Γ_j -tym elemencie brzegowym. Analogicznie do (13) każdą funkcję opisaną na Γ_j -tym elemencie można wyrazić jako

$$(\cdot)(\xi) = \sum_k (\cdot)_k^j S_k^j(\xi) \quad (14)$$

gdzie za (\cdot) należy podstawić wymagany symbol funkcji.

W celu uproszczenia postaci dalszych wzorów, wprowadzona zostanie transformacja przekształcająca lokalną numerację węzłów interpolacji w numerację globalną. Polega ona na przydzieleniu każdemu k -temu węzłowi j -tego elementu brzegowego kolejnej liczby naturalnej v

$$(\cdot)_k^j \Leftrightarrow (\cdot)_v \quad (15)$$

Uwzględniając tę transformację, wzór (14) można zapisać jako

$$(\cdot) = \sum_{v=1}^{N_v} (\cdot)_v S_v \quad (16)$$

gdzie N_v to ilość wszystkich węzłów interpolacji. W kolejnych wzorach będzie stosowana numeracja globalna.

Powyższe zależności pozwalają zapisać równanie (11) macierzowo

$$\mathbf{Hu} = \mathbf{Gq} \quad (17)$$

gdzie $\mathbf{u} = [u_1, u_2, \dots, u_{N_v}]^T$, $\mathbf{q} = [q_1, q_2, \dots, q_{N_v}]^T$,

$$H_{\mu\nu} = \int S_\nu(\xi) \frac{\partial G^*(\mathbf{r}(\xi), \mathbf{r}_\mu)}{\partial n} d\Gamma(\mathbf{r}(\xi)), \quad G_{\mu\nu} = \int S_\nu(\xi) G^*(\mathbf{r}(\xi), \mathbf{r}_\mu) d\Gamma(\mathbf{r}(\xi))$$

Należy zwrócić uwagę, że w związku z przeprowadzoną dyskretyzacją brzegu, dla każdej wartości $H_{\mu\nu}$ i $G_{\mu\nu}$ odpowiadające jej całki po brzegu są zawężone jedynie do elementu, na którym określona jest adekwatna ν -ta funkcja kształtu. Ostatecznie

$$\mathbf{C}_B \mathbf{u} = \mathbf{q} \quad (18)$$

gdzie $\mathbf{C}_B = \mathbf{G}^{-1} \mathbf{H}$. Powstała w ten sposób macierz \mathbf{C}_B wyraża zależność składowej normalnej strumienia pola q od potencjału u w poszczególnych węzłach na brzegu obszaru.

W pewnych szczególnych przypadkach \mathbf{C}_B jest równoważna GCM. W ogólności, \mathbf{C}_B będzie nazywana macierzą pojemności brzegowych (BCM – Boundary Capacitance Matrix). Otrzymanie z niej GCM układu ścieżek będzie wymagało dodatkowych przekształceń.

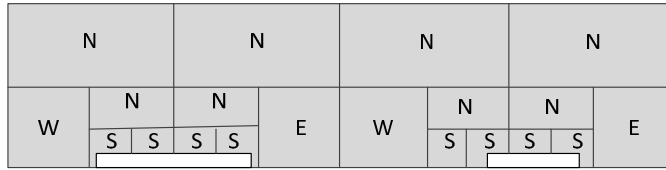
4. Hierarchiczny podział binarny

W niniejszej pracy, w celu zwiększenia precyzji obliczeń, zdecydowano się na podział każdej warstwy dielektrycznej na podobszary. Metodą zastosowaną do automatycznej generacji siatki obszaru jest metoda hierarchicznego podziału binarnego. Dyskretyzacja tego rodzaju umożliwia zagęszczenie siatki w rejonach przewodników, a to z kolei, pozwala na kontrolę dokładności rozwiązania, przy zachowaniu niewielkiej różnorodności typów podobszarów.

Zakładając, że drzewo binarne odpowiadające podziałowi obszaru musi być zrównoważone (Rys. 2), okaże się, że obszary-liście występujące w każdej warstwie dielektrycznej będą w większości elementami należącymi do ograniczonego zbioru elementów (Rys. 3). Daje to możliwość konstrukcji biblioteki BCM dla tych elementarnych obszarów.

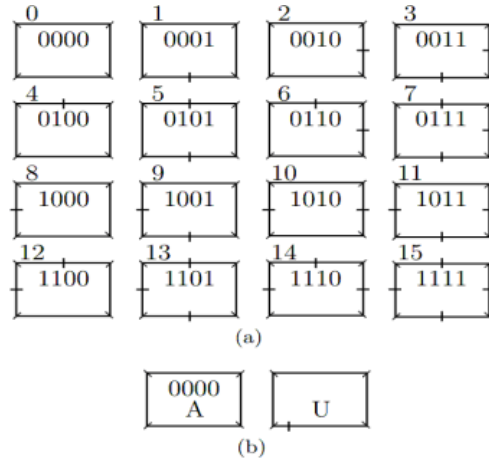
Ponieważ w przeważającej większości, obszarami tworzącymi siatkę obszaru będą te oznaczone na Rys. 3 liczbami 0, 1, 2, 4, 8, można, w celach optymalizacyjnych ograniczyć wielkość biblioteki do tych właśnie elementów. Dla pozostałych obszarów wymagane będzie każdorazowe obliczanie ich BCM.

W przypadku algorytmu przedstawianego w tej pracy biblioteczne BCM nie wymagają parametryzowania tak jak w [9], a w związku z tym i dodatkowych obliczeń przed włączeniem ich do macierzy rozwiązania.



Rys. 2. Hierarchiczny podział binarny przykładowej linii planarnej o dwóch ścieżkach przewodzących, z zaznaczonymi typami podobszarów: północnym (N), wschodnim (E) i zachodnim (W)

Fig. 2. Hierarchical binary domain decomposition for model of planar transmission line with two conductors (subdomain types shown in the picture: northern (N), eastern (E), western (W))



Rys.3. Obszary-liście, które mogą występować w siatkach binarnych (a) obszary dielektryczne (b) obszary zawierające przewodnik

Fig. 3. Leaf-subdomain types that can be obtained in hierarchical binary domain decomposition (a) dielectric subdomain types (b) subdomain types that include conducting paths

5. Hierarchiczne szacowanie macierzy pojemności

5.1. Makromodele

W ogólności, w przypadku pojedynczego obszaru, odpowiadające mu równanie (17) będzie miało postać

$$\varepsilon_k \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{cc} & \mathbf{C}_{cd} & \mathbf{C}_{ci} \\ \mathbf{C}_{dc} & \mathbf{C}_{dd} & \mathbf{C}_{di} \\ \mathbf{C}_{ic} & \mathbf{C}_{id} & \mathbf{C}_{ii} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_c \\ \mathbf{u}_d \\ \mathbf{u}_i \end{bmatrix} = \varepsilon_k \begin{bmatrix} \mathbf{q}_c \\ \mathbf{q}_d \\ \mathbf{q}_i \end{bmatrix} \quad (19)$$

gdzie węzły na każdym rodzaju brzegu zostały odpowiednio pogrupowane, co jest zasygnalizowane właściwymi indeksami podmacierzy występujących we wzorze (19) c – dla węzłów na przewodnikach oraz d – dla węzłów leżących na brzegu zewnętrznym oraz i – dla węzłów na granicach pomiędzy warstwami różnych dielektryków. Pary tych indeksów oznaczają wzajemne oddziaływanie pomiędzy odpowiednimi częściami brzegu, np. cd to oddziaływanie węzłów leżących na elementach z warunkiem Neumanna na węzły na przewodnikach, cc to oddziaływanie węzłów leżących na przewodnikach na siebie samych, itd.

Obliczenie BCM obszaru powstałego przez połączenie dwóch podobszarów Ω_a i Ω_b , które graniczą ze sobą, wymaga uwzględnienia warunków ciągłości pola (6) na granicy między nimi. Połączenie macierzy odpowiadających obu obszarom i po prostej reorganizacji tworzy się wspólny układ równań:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{C}_{cc} & \mathbf{C}_{cd} & \mathbf{C}_{ci} \\ \mathbf{C}_{dc} & \mathbf{C}_{dd} & \mathbf{C}_{di} \\ \mathbf{C}_{ic} & \mathbf{C}_{id} & \varepsilon_a \mathbf{C}_{ii}^{(a)} + \varepsilon_b \mathbf{C}_{ii}^{(b)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_c \\ \mathbf{u}_d \\ \mathbf{u}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_c \\ q_d \\ 0 \end{bmatrix} \quad (20)$$

W rozpatrywanym zagadnieniu znajomość wartości strumienia pola w poszczególnych węzłach nie jest konieczna. Z tego powodu, kosztem utraty tej informacji, możliwa jest redukcja wymiarów macierzy z równania (20), poprzez scałkowanie strumienia pola q na przewodniku. Wartość otrzymana w ten sposób jest całkowitą ilością ładunku Q zgromadzonego na przewodniku.

Węzły leżące na granicy obszarów da się usunąć zastępując układ równań (20) dopełnieniem Schura. Przyjmując

$$\mathbf{Z}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{cc} & \mathbf{C}_{cd} \\ \mathbf{C}_{dc} & \mathbf{C}_{dd} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Z}_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{ci} \\ \mathbf{C}_{di} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Z}_3 = [\varepsilon_a \mathbf{C}_{ii}^{(a)} + \varepsilon_b \mathbf{C}_{ii}^{(b)}], \quad \mathbf{Z}_4 = [\mathbf{C}_{ic} \quad \mathbf{C}_{id}]$$

da się uzyskać macierz BCM dwóch podobszarów, którą na powrót można zapisać w postaci (19):

$$\mathbf{C}_B = \mathbf{Z}_1 - \mathbf{Z}_2 \mathbf{Z}_3^{-1} \mathbf{Z}_4 \quad (21)$$

Tworzone w ten sposób makromodele można, po dodaniu do biblioteki BCM, również wykorzystywać w dalszym procesie obliczeń.

5.2. Transformacja BCM do GCM

Podjęcie opisane powyżej umożliwia hierarchiczną syntezę podobszarów w ramach każdej z warstw dielektrycznych i obliczenie ich BCM. Następnie, w analogiczny sposób można „skleić” ze sobą i te macierze uzyskując BCM całej struktury. Tak otrzymana macierz opisuje oddziaływanie pomiędzy przewodnikami, a elementami brzegowymi umieszczonymi na dielektrykach i ograniczającymi strukturę od zewnątrz.

Usunięcie wszystkich węzłów leżących na granicach między dielektrykami pozwala uprościć układ równań (18) do postaci

$$\begin{bmatrix} \mathbf{C}_{cc} & \mathbf{C}_{cd} \\ \mathbf{C}_{dc} & \mathbf{C}_{dd} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_c \\ \mathbf{u}_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_c \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (22)$$

przy czym w równaniu (21) uwzględniono założony jednorodny warunek Neumanna. Ponowne zastosowanie dopełnienia Schura dla BCM z równania (21) eliminuje z niej wpisy dotyczące zewnętrznych węzłów nie leżących na przewodnikach

$$\mathbf{C}_G = \mathbf{C}_{cc} - \mathbf{C}_{cd} \mathbf{C}_{dd}^{-1} \mathbf{C}_{dc} \quad (23)$$

i pozwala na uzyskanie równania

$$\mathbf{C}_G \mathbf{u}_c = \mathbf{Q}_c \quad (24)$$

Ostatni wzór jest równoważny równaniu (2), a macierz \mathbf{C}_G jest GCM układu przewodników.

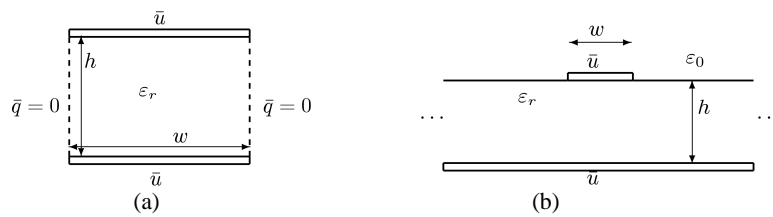
6. Eksperymenty numeryczne i wyniki

W pracy rozważania ograniczono do konfiguracji przewodników, które mogą być rozpatrywane jako struktury 2D. Uproszczenie to jest możliwe, gdy założy się, że propagowane sygnały mają postać fali quasi-TEM rozchodzącej się wzdłuż nieskończenie długich ścieżek. Nieograniczona długość ścieżek implikuje fakt, że pojemności pasożytnicze będą określane na jednostkę ich długości. Modelowane struktury traktuje się jako niejednorodne strefowo. Jednak zakłada się liniowość, jednorodność i izotropowość właściwości materiałów ją tworzących. Stosunek szerokości ścieżek przewodzących do ich grubości jest na tyle duży (10-200), że uprawnia to do wprowadzenia dodatkowego uproszczenia. Zakłada się mianowicie ich zerową grubość.

Wpływ parametru λ na wynik obliczeń został przedstawiony na przykładzie dwóch układów testowych posiadających rozwiązanie analityczne. Są to:

(A) uproszczony model kondensatora płasko-równoległego o szerokości w i odległości między okładzinami h równych 0.1 mm (Rys. 4a). Zakładając, że dielektryk wypełniający kondensator to powietrze, pojemność kondensatora wyniesie $C_{ex} = 8.8542$ pF/m [5].

(B) ścieżka o szerokości w umieszczona na podłożu o wysokości h i o stałej dielektrycznej ϵ_r . Na spodzie podłoża znajduje się rozciągająca się do nieskończoności doskonale przewodząca płaszczyzna (Rys. 4b).



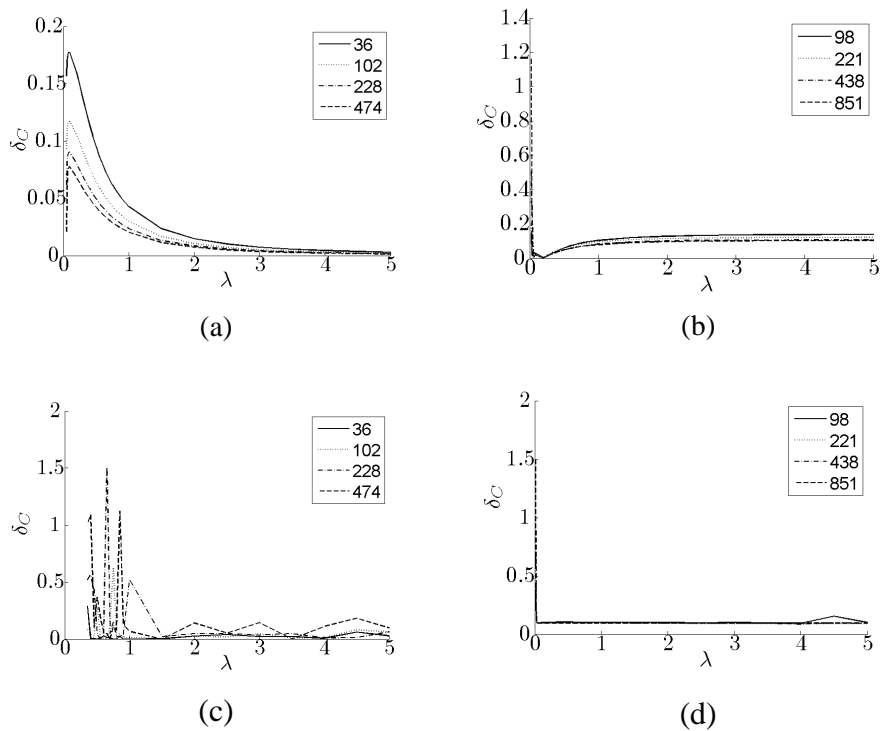
Rys. 4. Geometria zagadnień testowych.

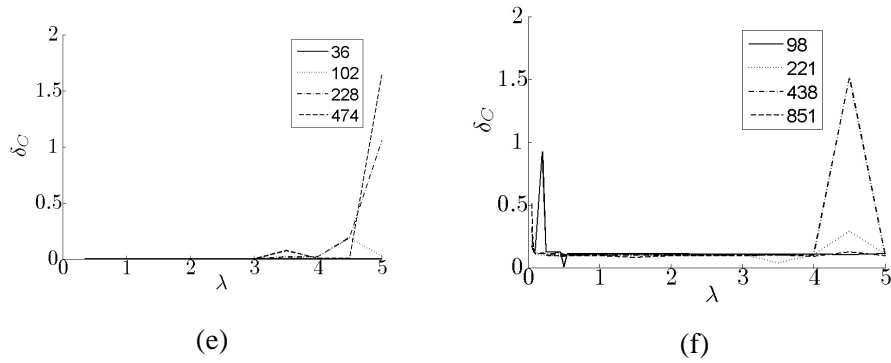
Fig. 4. Geometry of two test problems.

Przyjmując $w = h = 0.1$ mm oraz $\epsilon_r = 9.8$, wartość pojemności wyrażona w faradach na jednostkę długości wynosi $C_{\text{ex}} = 175.0904$ pF/m [21].

Na Rys. 5 przedstawiono, w zależności od parametru λ , wykres błędu bezwzględnego oszacowanej wartości pojemności C , zdefiniowany jako:

$$C = (C_{\text{ex}} - C) / C_{\text{ex}} \quad (25)$$





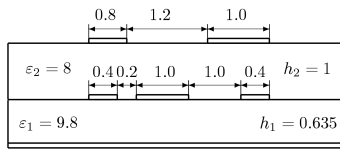
Rys. 5. Wpływ odległości odsunięcia węzłów λ na zbieżność rozwiązania zagadnienia kondensatora (a),(c),(e) oraz linii mikropaskowej (b),(d),(f) elementów stałych (a),(b), liniowych (c), (d), kwadratowych (e),(f)

Fig. 5. Impact of λ collocation-point-distance from real boundary on solution convergence for parallel-capacitor problem (a),(c),(e) and microstripline problem (b),(d),(f) for constant (a),(b), linear (c), (d) and quadratic (e), (f) boundary elements

Rysunki po lewej stronie ((a), (c), (e)) odnoszą się do przykładu (A), z kolei prawa kolumna (rysunki (b), (d), (f)) dotyczy zagadnienia (B). Kolejne wiersze odpowiadają stopniowi interpolacji elementów brzegowych użytych do rozwiązania, i tak w wierszu pierwszym (rysunki (a), (b)) przedstawiono wyniki dla elementów stałych, drugim ((c) i (d)) -- dla elementów liniowych, trzecim ((e) i (f)) -- dla elementów kwadratowych. Każdy rysunek zawiera 4 wykresy, odpowiadające stopniowi podziału obszaru, a liczby w legendzie odpowiadają liczbie węzłów interpolacji użytych przy dyskretyzacji obszaru zagadnienia.

Umieszczenie punktów kolokacji zbyt blisko brzegu ($\lambda < 0.01$) powoduje znaczący wzrost błędu. Z drugiej strony, nadmierne oddalenie ($\lambda > 2.5$) pogarsza uwarunkowanie macierzy pojemności. Biorąc powyższe pod uwagę, można uznać, że przedział $\langle 1, 2 \rangle$ zapewnia kompromis pomiędzy dokładnością rozwiązania, a uwarunkowaniem macierzy głównej.

Dla ustalonego $\lambda = 1.5$ przeprowadzono szereg eksperymentów dla różnych konfiguracji ścieżek. Wyniki obliczeń dla przykładowego układu testowego o bardziej skomplikowanej geometrii (Rys. 6), są umieszczone w Tabeli 1. W przykładzie tym rezultat obliczeń MTK odniesiono do wyników uzyskanych przy pomocy MEB oraz wyniku otrzymanego przy pomocy programu Linpar (metoda momentów) [10].



Rys. 6. Problem testowy o złożonej geometrii.

Fig. 6. Test problem with complicated geometry.

Tabela 1. Rozwiązania uzyskane dla zagadnienia przedstawionego na Rys. 6.

Table 1. Solution of the problem shown in Fig. 6.

MTK					MEB					Linpar (MoM)				
238.6	-77.3	-0.3	-37.4	-1.4	241.1	-79.6	-0.3	-38.1	-1.3	240.4	-78.8	-0.3	-37.4	-1.5
-77.2	363.6	-14.4	-44.7	-30.0	-79.6	363.9	-14.7	-44.8	-29.8	-78.8	362.7	-14.7	-44.5	-29.7
-0.3	-14.3	213.2	-1.8	-48.8	-0.3	-14.7	214.5	-1.7	-49.7	-0.3	-14.7	214.1	-1.8	-48.9
-37.5	-44.7	-1.8	122.0	-9.8	-38.1	-44.7	-1.7	122.1	-9.9	-37.3	-44.4	-1.8	125.6	-10.3
-1.4	-30.0	-48.8	-9.8	131.5	-1.3	-29.8	-49.8	-9.9	131.5	-1.5	-29.4	-48.8	-10.3	135.5

7. Podsumowanie

W artykule przedstawiono zastosowanie MTK w algorytmie hierarchicznego obliczania macierzy pojemności resztkowych układu ścieżek planarnych, a uzyskane rezultaty pozwalają stwierdzić przydatność zaprezentowanego algorytmu w omawianym zagadnieniu.

Z analizy zaprezentowanych przykładów wynikają następujące wnioski:

- W bezpośredniej MTK odsunięcie punktów kolokacji od brzegu rzeczywistego ma znaczenie; zbyt małe powoduje pogorszenie rozwiązania, natomiast zbyt duże powoduje pogorszenie uwarunkowanie macierzy głównej.
- Nie ustalono ściślej wartości odsunięcia, ale na podstawie eksperymentów numerycznych, odniesionych do rozwiązań analitycznych, określono przedział, dla którego wyniki obliczeń są najlepsze jakościowo, a jednocześnie zapewniający kompromis między dokładnością rozwiązania, a uwarunkowaniem macierzy głównej.
- W algorytmie hierarchicznego obliczania macierzy pojemności, zarówno w przypadku zastosowania MEB, jak i MTK jako silnika rozwiązującego zagadnienie brzegowe obie metody, zarówno MEB jak i MTK, zastosowane jako silnik rozwiązujący zagadnienie brzegowe w algorytmie hierarchicznego obliczania macierzy pojemności mają porównywalny koszt przygotowania danych, koszt obliczeń oraz wyniki ilościowe, a więc ich efektywność jest porównywalna.

Ponieważ MTK nie były do tej pory stosowane w przedstawianym zagadnieniu, metoda ta poszerza liczbę metod możliwych do aplikacji w takich zagadnieniach.

W dalszej kolejności planuje się aplikację algorytmu dla bardziej złożonych geometrycznie struktur dwu- i trójwymiarowych.

Program MATLAB wykorzystany do przeprowadzenia badań został zakupiony w wyniku realizacji Projektu nr UDA-RPPK.01.03.00-18-003/10-00 „Budowa, rozbudowa i modernizacja bazy naukowo-badawczej Politechniki Rzeszowskiej” współfinansowanego ze środków Unii Europejskiej w ramach Regionalnego Programu Operacyjnego Województwa Podkarpackiego na lata 2007-2013, Priorytet I. Konkurencyjna i Innowacyjna Gospodarka, Działanie 1.3 Regionalny system innowacji.

Literatura

- [1] Antes, H. On a regular boundary integral equation and a modified Trefftz method in Reissner's plate theory. *Engineering Analysis*, 1, 3, 1984, 149-153.
- [2] Bachtold, M., Korvink, J. G., and Baltes, H. Automatic adaptive meshing for efficient electrostatic boundary element simulations. In *Simulation of Semiconductor Processes and Devices, 1996. SISPAD 96. 1996 International Conference on (1996)*, IEEE, 127-128.
- [3] Bachtold, M., Spasojevic, M., Lage, C., and Ljung, P. B. A system for full-chip and critical net parasitic extraction for ULSI interconnects using a fast 3-D field solver. *Computer-Aided Design of Integrated Circuits and Systems*, IEEE Transactions on, 19, 3, 2000, 325-338.
- [4] Benedek, P. and Silvester, P. Capacitance of Parallel Rectangular Plates Separated by a Dielectric Sheet. *Microwave Theory and Techniques*, IEEE Transactions on, 20, 8, 1972, 504-510.
- [5] Borkowski, M. Ocena efektywności metod brzegowych w analizie parametrów resztkowych struktur planarnych. Rozprawa doktorska. Politechnika Rzeszowska, Rzeszów 2013.
- [6] Brański A., Borkowski, M., and Borkowska, D. A comparison of boundary methods based on inverse variational formulation. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 36, 4, 2012, 505-510.
- [7] Brebbia, C. A. and Dominguez, J. Boundary element methods for potential problems. *Applied Mathematical Modelling*, 1, 7, 1977, 372-378.
- [8] Cheng, A. H. D. and Cheng, D. T. Heritage and early history of the boundary element method. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 29, 3, 2005, 268-302.
- [9] Dengi, E. Aykut and Rohrer, Ronald A. Boundary element method macromodels for 2-D hierarchical capacitance extraction. In *Proceedings of the 35th annual Design Automation Conference (New York, NY, USA 1998)*, ACM, 218-223.
- [10] Djordevic, Antonije, Djordjevic, Antonije R., and Sarkar, Tapan K. *Linpar for Windows: Matrix Parameters for Multiconductor Transmission Lines, Twodiskettes and User's Manual (Microwave Software Library)*. Artech House Publishers.

- [11] Fukuda, Sanae, Shigyo, Naoyuki, Kato, Kato, and Nakamura, Shin. A ULSI 2-D capacitance simulator for complex structures based on actual processes. *IEEE Transactions on Computer-Aided Design of Integrated Circuits and Systems*, 9, 1, 1990, 39-47.
- [12] Gu, Jiangchun, Wang, Zeyi, and Hong, Xianlong. Hierarchical computation of 3D interconnect capacitance using direct boundary element method. In *IEEE Asia South Pacific Design Automation Conference (2000)*, 447-452.
- [13] Harrington, R. F., Pontoppidan, K., Abrahamsen, P., and Albertsen, N. C. Computation of Laplacian potentials by an equivalent-source method. *Proceedings of the Institution of Electrical Engineers*, 116, 10 (1969), 1715-1720.
- [14] Heise, U. Numerical properties of integral equations in which the given boundary values and the sought solutions are defined on different curves. *Computers & Structures*, 8, 2, 1978, 199-205.
- [15] Kao, W. H., Lo, Chi-Yuan, Basel, M., and Singh, R. Parasitic extraction: current state of the art and future trends. *Proceedings of the IEEE*, 89, 5, 2001, 729-739.
- [16] Kita, E. and Kamiya, N. Trefftz method: an overview. *Advances in Engineering Software*, 24, 1-3 (1995), 3-12.
- [17] Kupradze, V.D., Aleksidze, M. A. The method of functional equations for the approximate solution of certain boundary value problems (in Russian). *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics*, Vol. 4, No. 4. (1964), pp. 683-715.
- [18] Li, Zi-Cai, Lu, Tzon-Tzer, Huang, Hung-Tsai, and Cheng, Alexander H. D. Trefftz, collocation, and other boundary methods -- A comparison. *Numer. Methods Partial Differential Eq.*, 23, 1 (2007), 93-144.
- [19] Patel, P. D. Calculation of Capacitance Coefficients for a System of Irregular Finite Conductors on a Dielectric Sheet. *Microwave Theory and Techniques, IEEE Transactions on*, 19, 11, (1971), 862-869.
- [20] Patterson, C. and Sheikh, M. A. A regular boundary element method for fluid flow. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 2, 3 (1982), 239-251.
- [21] Paul, Clayton R. *Analysis of Multiconductor Transmission Lines*. Wiley-IEEE Press, 2007.
- [22] Yu, Wenjian and Wang, Zeyi. An efficient quasi-multiple medium algorithm for the capacitance extraction of actual 3-D VLSI interconnects (2001), 366-371.
- [23] Yu, W. and Wang, Z. Capacitance extraction. In Chang, Kai, ed., *Encyclopedia of Rf and Microwave Engineering*. 2005.

APPLICATION OF DIRECT TREFFTZ-KUPRADZE METHOD IN HIERARCHICAL CAPACITANCE EXTRACTION PROBLEM

S u m m a r y

The paper presents algorithm of the hierarchical parasitic capacitance extraction of planar transmission lines. The algorithm utilizes direct Trefftz-Kupradze method which is derived from variational formulation. This approach lets one compare and contrast direct Trefftz-Kupradze method with popular Boundary Element and common formulation of both methods (the same

boundary discretization, the same potential and flux interpolation, the same form of boundary-integral equations).

Considerations are reduced to 2D geometries and discretizations are carried out by hierarchical binary decomposition. Boundary-integral equations for Laplace problem are formulated by appropriate method for each leaf-subdomain. Then, they are transformed into so-called Boundary Capacitance Matrices. In the process of tree traversal Boundary Capacitance Matrices are merged together. This matrix combining is done via Schur's complement method. Finally, the last transformation of Boundary Capacitance Matrix yields General Capacitance Matrix of the system of conductors.

Binary decomposition of the considered structures gives opportunity to build library of Boundary Capacitance Matrices for specific subdomain geometries and their utilization without the need of recalculation.

By the means of proposed algorithm the influence of the distance of shifted collocation nodes (the feature specific for Trefftz-Kupradze method) is studied experimentally. The research yields quasi-optimal value of the distance, that is used in further numerical experiments. The obtained results are compared to analytical solutions and to the results given by Linpar application (method of moments).

Keywords: parasitic capacitance, direct boundary methods, boundary element method, planar transmission lines.

DOI: 10.7862/re.2013.4

Tekst złożono w redakcji: listopad 2013

Przyjęto do druku: grudzień 2013