

Yaroslav MARUSHCHAK¹
Bogdan KOPCHAK²

ANALIZA MODELI CAŁKOWANIA I RÓŻNICZKOWANIA UŁAMKOWEGO

W artykule przeanalizowano dokładność modeli ułamkowych członów całkoworóżniczkowych w ujęciu Riemanna, Riemanna-Liouville'a, Grünwald-Letnikov i Oustaloupa względem modelu opracowanego na podstawie przekształcenia Laplace'a jako modelu wzorcowego. Pokazano wady i zalety każdego z tych modeli. Zaproponowano modyfikację aproksymacji Oustaloupa, która pozwala realizować regulatory systemów elektrotechnicznych ułamkowego rzędu przy użyciu mikrokontrolera. Badania prowadzone przez autorów dotyczące możliwości aproksymacji ułamkowych członów transmitancją rzędu całkowitego wykazały, że reprezentacja całkującego członu ułamkowego za pomocą pakietu NINTEGER z dość wysokim rzędem aproksymacji ($N \geq 5$) zgadza się z wynikami aproksymacji Oustaloupa. Jednak w pierwszej chwili odpowiedzi jednostkowe zmieniają się skokowo, z czym nie można się zgodzić dla członu całkującego. Aby rozwiązać ten problem zaproponowano modyfikację metody aproksymacji Oustaloupa. Modyfikacja ta polega na tym, że stopień wielomianu licznika jest zmniejszony o jeden. Dla weryfikacji takiego postępowania zostało przeprowadzone badanie możliwości pominięcia jednego zera w transmitancji aproksymacyjnej, albo usunięcia składowej wielomianu licznika najwyższego stopnia s . Wyniki takich badań wykazały korzyść drugiego podejścia. Dokładność modeli NINTEGER i Oustaloupa jest praktycznie jednakowa, tylko model Oustaloupa realizuje się w programie MATLAB, a model NINTEGER w programie MATLAB Simulink. Tym samym wyniki symulacji z wykorzystaniem modelu Oustaloupa znajdują się w pamięci programu MATLAB co ułatwia ich analizę. Należy zaznaczyć, że model Oustaloupa pozwala w dość prosty sposób realizować ułamkowe regulatory wskutek prostoty procedury obliczeń, chociaż dokładność tego modelu nie jest wysoka.

Słowa kluczowe: model, całkowanie ułamkowe, różniczkowanie ułamkowe, regulatory, transmitancja ułamkowa.

¹ Autor do korespondencji: Yaroslav Marushchak, Politechnika Rzeszowska, Katedra Elektrotechniki i Podstaw Informatyki, ul. W. Pola 2, 35-959 Rzeszów, tel.: 17 743-2469, jamaru@prz.edu.pl

² Bogdan Kopchak, Politechnika Lwowska, Katedra Maszyn Elektrycznych. ul. S. Bandery 12, 79-013 Lwów Ukraina, tel.: 380 32 258 2656, kopchak@mail.ru

1. Wprowadzenie

Obecnie stosowanie ułamkowego różniczkowania i całkowania rozwija się teoretycznie i w aspekcie stosowanym. Ta dziedzina matematyki przekształciła się w potężną metodę modelowania matematycznego skomplikowanych procesów dynamicznych w zwykłych i fraktalnych środowiskach. Dzięki tej metodzie istnieje możliwość rozwiązywania różnych zadań analizy, syntezy, identyfikacji, diagnostyki, projektowania nowoczesnych systemów sterowania itp. [3-6, 10]. Badania w dziedzinie systemów rzędu ułamkowego udowodniły, że systemy rzędu całkowitego są przypadkiem cząstkowym systemów ułamkowych. Zmniejszenie rzędu modelu jest bardzo ważną dziedziną badań ze względu na możliwość stosowania kontrolerów sterujących dla układów ułamkowych na zasadach różnych strategii sterowania automatycznego [3]. Jednocześnie szczególną uwagę należy zwrócić na zapobieganie utracie najważniejszych cech systemów dynamicznych. We współczesnej literaturze [3-6, 9] istnieją różne podejścia do realizacji regulatorów ułamkowego rzędu z wykorzystaniem różnych modeli. Są one oparte na różnych opisach ułamkowych członów różniczkująco - całkujących. Główne wzory całkowania ułamkowego zostały opracowane przez Liouville'a i Riemanna. Rozwijając teorie Liouville'a, Grünwald wprowadził pojęcie pochodnej ułamkowej, jako granice ilorazów różnicowych. Caputo zaproponował swoje rozwiązanie, które różni się od definicji Riemanna-Liouville'a tym, że funkcję na początku różniczuje się z najmniejszym rzędem całkowitym n , który przekracza ułamkowy rząd j a następnie całkuje się z rzędem $n-j$. Doświadczenia naukowców w dziedzinie syntezy elektrotechnicznych regulatorów ułamkowych, a zwłaszcza systemów elektromechanicznych pokazują, że ułamkowy rząd składowej różniczkującej nie jest większy niż $j=1$ [1, 6, 8, 9]. Do rozwoju i korekty tej teorii w dziedzinie elektrotechniki przyczynili się: Heaviside, N. Viner i J. Carlson.

Na obecnym etapie modelowania ułamkowych członów różniczkująco - całkujących w systemach elektrotechnicznych powszechnie używa się pakietu NINTEGER [7]. Stosowanie specjalnie zaprojektowanego programu NINTEGER, jako pakietu aplikacji MATLAB Simulink, pozwala wykonywać badania zastosowania regulatorów rzędu ułamkowego w układach regulacji automatycznej z ułamkowymi obiektami regulacji. Należy zaznaczyć, że NINTEGER ma pewne wady:

- pakiet NINTEGER działa wyłącznie w środowisku MATLAB Simulink i niemożna zastosować go poza tym środowiskiem;
- z literatury wiadomo, że nie jest znana w tym pakiecie dokładność modelowania członów ułamkowych.

2. Aproksymacja transmitancji ułamkowej

Celem artykułu jest teoretyczne opracowanie możliwości oprogramowania w środowisku programowym MATLAB w oparciu o znaną aproksymację Oustaloupa. Takie oprogramowanie powinno mieć możliwość jego wykorzystania w aplikacji MATLAB Simulink zamiast NINTEGER. Oprócz tego powinna być możliwość badania porównywalnej dokładności modeli ułamkowych regulatorów w przedstawieniu Oustaloupa, Riemanna, Riemanna-Liouville'a i Grünwalda–Letnikova względem modeli uzyskanych przez przekształcenia Laplace'a jako modelu wzorcowego. Pozwoli to wybrać najlepszy model dla realizacji regulatorów z wykorzystaniem mikrokontrolera.

Wyżej wymienione wady pakietu NINTEGER skłoniły autorów do opracowania własnych modeli w środowisku programowym MATLAB opartych o wyrażenia znanej aproksymacji Oustaloupa. Zgodnie z taką aproksymacją, transmitancję ułamkowych członów różniczkujących ($s^{-\alpha}$) i całkujących ($s^{+\alpha}$), jako składowych regulatorów ułamkowych, można przedstawić wyrażeniem

$$s^{\pm\alpha} = \left(\frac{\omega_u}{\omega_h} \right)^\alpha \prod_{k=-N}^{k=N} \frac{1 + s / \omega'_k}{1 + s / \omega_k}, \quad (1)$$

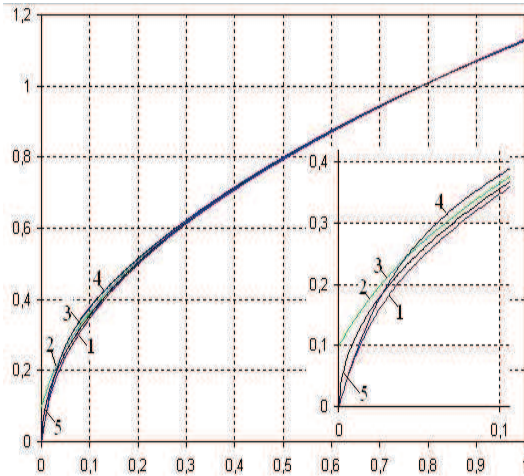
gdzie N - rząd aproksymacji, który należy zadać; ω'_k, ω_k - zera i bieguny zastępczej transmitancji rzędu całkowitego; $\omega_u = \sqrt{\omega_l \omega_h}$ (ω_l, ω_h - dolna i górna granica przedziału częstotliwości).

Obliczone zgodnie z (1) wartości zer, biegunów i współczynniki wzmocnienia zastępczej transmitancji rzędu całkowitego dla $N = 1; 2; \dots 5$ zostały zaimplementowane w środowisku MATLAB Simulink. Taka aproksymacja zapewnia następujące zalety względem pakietu NINTEGER:

- opracowane modele członów ułamkowych można stosować nie tylko w środowisku MATLAB Simulink, ale także w środowisku programowym MATLAB;
- struktura i parametry transmitancji aproksymującej, otrzymanej na podstawie metody Oustaloupa znajduje się w pamięci programu MATLAB, co ułatwia ich przegląd, badanie i weryfikację.

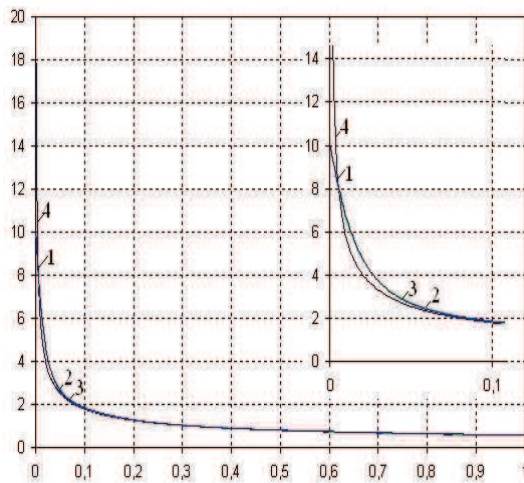
Na rysunku 1 i rysunku 2 przedstawiono odpowiedzi jednostkowe ułamkowych, całkujących i różniczkujących członów obliczonych za pomocą pakietu NINTEGER (krzywa -1) i korzystając z aproksymacji Oustaloupa rzędu $N=3$ (krzywa -2) i $N=4$ (krzywa -3) dla transmitancji ułamkowej $s^{-0.5}$ (rys. 1) i $s^{0.5}$ (rys. 2). Oprócz tego, na rysunku 1 zaprezentowano odpowiedź

jednostkową gdy stosuje się tak zwaną modyfikację aproksymacji Oustaloupa (krzywa-4), o której mowa niżej, i odpowiedzi jednostkowe obliczone metodą przekształcenia Laplace'a z wykorzystaniem programu Mathcad (krzywa -5). Na rys.2 krzywa - 4 reprezentuje odpowiedź jednostkową obliczoną metodą przekształcenia Laplace'a.



Rys. 1. Odpowiedzi jednostkowe całkującego członu ułamkowego z transmitancją $s^{-0.5}$

Fig. 1. Response Unit member of the fractional integrator with the transfer function $s^{-0.5}$



Rys. 2. Odpowiedzi jednostkowe różniczkującego członu ułamkowego z transmitancją $s^{0.5}$

Fig. 2. Response Unit member fractional differentiation with the transfer function $s^{0.5}$

Badania [7] prowadzone przez autorów dotyczące możliwości aproksymacji ułamkowych członów transmitancją rzędu całkowitego wykazały, że reprezentacja całkującego członu ułamkowego za pomocą pakietu NINTEGER z dość wysokim rzędem aproksymacji ($N \geq 5$) zgadza się z wynikami aproksymacji Oustaloupa. Jednak, jak widać z powiększenia na rysunku 1, krzywe 2 i 3 w pierwszej chwili zmieniają się skokowo, z czym nie można się zgodzić dla członu całkującego. To zjawisko może być wytłumaczone tym, że transmitancja według wzoru (1) zawiera wielomiany w liczniku i mianowniku jednakowego stopnia. Aby rozwiązać ten problem zaproponowano modyfikację metody aproksymacji Oustaloupa. Modyfikacja ta polega na tym, że stopień wielomianu licznika jest zmniejszony o jeden. Dla weryfikacji takiego postępowania zostało przeprowadzone badanie możliwości pominięcia jednego zera w transmitancji aproksymacyjnej, albo usunięcia składowej wielomianu licznika najwyższego stopnia s . Wyniki takich badań wykazały korzyść drugiego podejścia. W tym przypadku odpowiedź jednostkowa przedstawia się krzywą 4 na rysunku 1.

3. Dokładność modelowania członów ułamkowych

Pozostaje jednak problem analizy dokładności aproksymacji Oustaloupa. Dlatego, aby sprawdzić dokładność modelu Oustaloupa musi być znaleziony model który można potraktować jako etalon. Taki model pozwala otrzymać odpowiedzi jednostkowe wzorcowe.

Wiadomo, że odwrotne przekształcenie Laplace'a transformaty $s^{-\alpha}$ zapisuje się w sposób następujący:

$$L^{-1} \left\{ \frac{1}{s^{\alpha}} \right\} = \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \quad (2)$$

gdzie: $\Gamma(\alpha)$ – funkcja gamma.

W rzeczywistości wzór (2) jest odpowiedzią impulsową członu. Dlatego też odpowiedź jednostkowa może być znaleziona po scałkowaniu odpowiedzi impulsowej.

Całkując (2), otrzymujemy wyrażenie odpowiedzi jednostkowej $I(t)$.

$$I(t) = \int \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} dt = \frac{t^{\alpha}}{\Gamma(\alpha) \cdot \alpha} + C \quad (3)$$

Teraz zapiszemy odwrotne przekształcenie Laplace'a dla różniczkującego członu ułamkowego z transmitancją $s^{0.5}$.

$$L\{s^\alpha\} = \frac{t^{-\alpha-1}}{\Gamma(-\alpha)} \quad (4)$$

Całkując wyrażenie (4) znajdujemy odpowiedź jednostkową $I(t)$ dla takiego członu.

$$I(t) = \int \frac{t^{-\alpha-1}}{\Gamma(-\alpha)} dt = \frac{t^{-\alpha}}{\Gamma(-\alpha+1)} + C \quad (5)$$

Wyrażenia (3) i (5) opisują odpowiedzi jednostkowe, które przyjmujemy, jako wzorcowe. Odpowiadają im wykresy na rysunku 1 (krzywa-5) i na rysunku 2 (krzywa-4). Korzystając z tych przebiegów można przeanalizować dokładność modelowania innymi sposobami.

Najczęściej spotykanymi modelami są:

Model Riemanna [8] przewiduje następujący wzór do obliczenia odpowiedzi jednostkowej dla całkującego członu ułamkowego:

$$D^{-\nu} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_c^x (x-t)^{\nu-1} f(t) dt + C(t) \quad (6)$$

Model Riemanna – Liouville [8] pozwala obliczać odpowiedzi jednostkowe dla różniczkującego członu ułamkowego w sposób następujący:

$${}_a D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dt}\right)^n \int_a^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha-n+1}} \quad (7)$$

Model Grünwalda–Letnikova [8] pozwala modelować ułamkowe człony różniczkująco - całkujące według wyrażenia

$${}_a D_t^\alpha f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} h^{-\alpha} \sum_{j=0}^{\left[\frac{t-a}{h}\right]} (-1)^j \binom{\alpha}{j} f(t-jh) \quad (8)$$

Modele matematyczne (6)-(8) zrealizowane zostały z wykorzystaniem programu MathCAD. W trakcie modelowania procesów według wzorów (6)-(8) spotkaliśmy się z następującymi problemami:

- obliczenie każdego następnego punktu przebiegu odpowiedzi jednostkowej wymaga znajomości wartości wszystkich policzonych wcześniej wartości. To powoduje, że każdy następny punkt zwiększa czas obliczeń i dla długotrwałych procesów nie każdy procesor sobie z tym zjawiskiem radzi;

- trwałość obliczenia odpowiedzi jednostkowej członu ułamkowego całkującego według modelu Riemanna (6) i członu ułamkowego różniczkującego według modelu Riemanna – Liouville’a (7) zależy od kroku całkowania i mocy obliczeniowej komputera.
- Jednocześnie należy zaznaczyć zalety modelu Grünwalda–Letnikova (8):
- wzór (8) łatwo policzyć dzięki temu, że przedstawia on skończoną sumę a nie całkę;
- występuje w nim większa szybkość obliczenia przebiegów dynamicznych;
- przedstawienie całkującego czy różniczkującego członu ułamkowego potrzebuje tylko zmiany znaku w tym samym wyrażeniu (+ dla różniczkującego członu i – dla całkującego członu).

Wadą tego modelu jest zwiększenie czasu obliczeń przy zwiększeniu dokładności obliczeń.

Stosując wyrażenia (3), (5) oraz modele (6)-(8) obliczono odpowiedzi jednostkowe całkującego członu ułamkowego z transmitancją $s^{-0.5}$ i różniczkującego członu ułamkowego z transmitancją $s^{0.5}$. Na podstawie wyników tych obliczeń przeanalizowano dokładność różnych sposobów modelowania. Dla oceny dokładności modelowania zastosowano następujące charakterystyki:

- dyspersja przebiegu odpowiedzi jednostkowej σ^2 , obliczonej jako

$$\sigma^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - y_{ie})^2, \text{ albo } \sigma = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - y_{ie})^2}, \quad (9)$$

gdzie: y_i – wartości badanej odpowiedzi jednostkowej w i -tym punkcie; y_{ie} – wartości wzorcowej odpowiedzi jednostkowej w i -tym punkcie; n – ilość próbek;

- względny uchyb aproksymacji odpowiedzi jednostkowej (stosuje się tylko dla całkującego członu ułamkowego), który oblicza się jako

$$\delta = \frac{\sigma}{y_u} \cdot 100 \% \quad (10)$$

gdzie y_u – ustalona wartość, albo wartość odpowiedzi jednostkowej dla wybranego czasu t_u na liniowej części krzywej wykresu.

Wyniki oceny dokładności aproksymacji różniczkującego i całkującego członu ułamkowego dla różnych modeli względem modelu na podstawie przekształcenia Laplace'a (model wzorcowy) pokazano w tabeli 1. Do obliczeń przyjęto $n=1001$, $t_u=1s$.

Badania przeprowadzone dla innych wartości ułamkowej potęgi α , a nie tylko dla $\alpha = \pm 0,5$, potwierdziły uzyskane wyniki.

Tabela 1. Wyniki oceny dokładności modelowania członów ułamkowych

Table 1. Results assess the accuracy of modeling fractional members

Transmitancja	Model									
	NINTEGER		Riemanna		Riemanna - Liouville'a		Grünwalda-Letnikova		Oustaloupa	
									N=3	
	σ	δ	σ	δ	σ	δ	σ	δ	σ	δ
$s^{-0.5}$	$648 \cdot 10^{-5}$	0,57	$8 \cdot 10^{-8}$	$7,1 \cdot 10^{-6}$	-	-	$572 \cdot 10^{-5}$	0,51	$\frac{699 \cdot 10^{-5}}{877 \cdot 10^{-5}}$	$\frac{0,62}{0,778}$
$s^{0.5}$	0,3147	-	-	-	$1,57 \cdot 10^{-7}$	-	$71 \cdot 10^{-3}$	-	$\frac{0,3135}{0,3135}$	-

4. Podsumowanie

Na podstawie analizy wyników reprezentowanych w tabelicy 1 wnioskujemy, że najwyższą dokładność modelowania uzyskujemy gdy korzystamy z modelu Riemanna (6) dla całkującego członu ułamkowego. Dla modelowania różniczkującego członu ułamkowego najlepiej jest stosować model Riemanna – Liouville'a (7).

Dokładność modeli NINTEGER i Oustaloupa jest praktycznie jednakowa, tylko model Oustaloupa realizuje się w programie MATLAB, a model NINTEGER w programie MATLAB Simulink. Tym samym wyniki symulacji z wykorzystaniem modelu Oustaloupa znajdują się w pamięci programu MATLAB co ułatwia ich analizę.

Model Grünwalda-Letnikova ma mniejszą dokładność w porównaniu z modelami Riemanna i Riemanna – Liouville ale model ten charakteryzuje się większą szybkością obliczeń.

Należy zaznaczyć, że model Oustaloupa pozwala w dość prosty sposób realizować ułamkowe regulatory wskutek prostoty procedury obliczeń, chociaż dokładność tego modelu nie jest wysoka.

Literatura

- [1] Busłowicz M. Wybrane zagadnienia z zakresu liniowych i ciągłych układów niecałkowitego rzędu. Pomiary Automatyka Robotyka, 2/2010, str. 93-114.
- [2] Duarte Pedro Mata de Oliveira Valerio. Ninteger v 2.3 Fractional control toolbox for Matlab. User and programmer manual. Universidade tecnica de Lisboa instituto superior tecnico. 2005. pp. 96
- [3] Dzieliński A., Sierociuk D., Sarwas G. Some applications of fractional order calculus A. Bulletin Of Polish Academy Of Sciences. Warsaw: Technical Sciences,

- vol. 58 (4). 2010. pp. 583 – 592.
- [4] Fortuna L., Graziani S., Muscato G., Nunnari G., Porto D.. Approximation of High-Order Lumped Systems by using Non-Integer Order Transfer Functions. Proc. of the 7th Mediterranean Conference on Control and Automation (MED99). 1999. pp. 2222–2230.
- [5] Leon O. Chua. Fractional order systems. Modeling and control Applications. World scientific series on nonlinear sciences. Series A. vol.72. Chapter 1. Fractional Order Systems. pp. 1-32.
- [6] Maiti D., Biswas S., Konar A. Design of a Fractional Order PID Controller Using Particle Swarm Optimization Technique. Proc. 2nd - National Conference on Recent Trends in Information Systems (ReTIS-08). 2008. p.5.
- [7] Marushchak Y.Y., Kopczak B.L. Ułamkowe standardowe formy stosowane do syntezy systemów elektromechanicznych. Czasopismo „Systemy elektrotechniczne i komputerowe.” Wydanie tematyczne „Problemy Automatyzowanego Napędu Elektrycznego. Teoria i praktyka”. „Technika”. Kijew. Wyd. 15(91). 2014. ss.57-60. (w j.ukrainskim).
- [8] Mehdi Dalir. Application of fractional calculus. Applied Mathematical Sciences, Vol. 4, 2010, pp. 1021-1032.
- [9] Podlubny I. Fractional Differential Equations/Mathematics in Science and Engineering. Vol. 198. -Academic Press. 1999. pp. 340.
- [10] Wasilew W.W., Simak L.A.: Ułamkowe obliczenia i metody aproksymacyjne w modelowaniu systemów dynamicznych, NAN, Kijew, ss. 256. 2008 (w j. rosyjskim).

ANALYSIS OF THE MODEL OF INTEGRATION-DIFFERENTIAL FRACTIONAL

Summary

The authors' research on the possibility of approximation of fractional order units by transfer functions of integer order proved that representation of fractional integral unit in the NINTEGER package with high approximation order ($n \geq 5$) is consistent with the results of approximation by Oustaloup transformation. As for the integral unit, there is a leap in its transition function which is not characteristic of integral regulator. To tackle this issue, we have proposed the modification of Oustaloup method, in which the order of a numerator polynomial is reduced by one. With the aim to calculate the accuracy of such representation, the research was done on the possibility of neglecting one zero in the resulting transfer function of integer order by means of reducing the numerator polynomial order by one or by exclusion of the item with the highest degree of s operator. The accuracy of the NINTEGER and Oustaloup models is almost the same, but the Oustaloup method is implemented in MATLAB program while the NINTEGER model is put into effect in MATLAB Simulink. Thus, the simulation results with the use of Oustaloup model are recorded in MATLAB memory, which facilitates their analysis. It should be noted that the Oustaloup method enables to easily implement fractional controllers because of the relative simplicity of calculation procedures, although the accuracy of the model is not high.

Keywords: models, fractional order controllers model, integrated and differential units.

DOI: 10.7862/re.2015.17

Tekst złożono w redakcji: luty 2015

Przyjęto do druku: kwiecień 2015