

Stanisław NOGA¹

ANALIZA DRGAŃ WŁASNYCH PŁYT PIERŚCIENIOWYCH Z OTWORAMI MIMOŚRODOWYMI

W pracy rozważane są drgania własne poprzeczne płyt pierścieniowych z nieciągłościami geometrycznymi w postaci otworów przelotowych i kołnierza. W procesie analizy wykorzystano metodę elementów skończonych i badania doświadczalne. Wymagane obliczenia wykonano w komercyjnym programie ANSYS. W analizie numerycznej stosowano modele bryłowe i powierzchniowe. Opracowane modele numeryczne zweryfikowano eksperymentalnie. W badaniach doświadczalnych stosowano najnowsze laserowe techniki pomiarowe. Prezentowane wyniki badań doświadczalnych i symulacji numerycznych potwierdzają występowanie zjawiska rozdzielenia wartości częstości własnych odnoszących się do postaci, w których liczba średnic węzłowych jest krotnością liczby otworów przelotowych. Prezentowana w pracy metodyka może być pomocna inżynierom zajmującym się analizą drgań układów modelowanych płytami kołowymi z mimośrodowymi otworami przelotowymi.

Słowa kluczowe: drgania poprzeczne, zniekształcone formy własne, modele z cykliczną symetrią

1. Wprowadzenie

Zagadnienia drgań poprzecznych płyt kołowych i pierścieniowych z zaburzoną geometrią są przedmiotem zainteresowania wielu badaczy i ośrodków badawczo-rozwojowych [1, 2, 4, 6-8, 10, 12]. Wynika to z faktu, że niektóre obrotowe części urządzeń (np. koła kolejowe, koła zębate, turbiny silników lotniczych) mogą być rozważane jako płyty pierścieniowe o geometrii wynikającej z konstrukcji modelowanych układów [1, 3, 7]. W monografii [3] przedstawiono ogólną teorię drgań poprzecznych płyt kołowo-symetrycznych z różnymi przypadkami warunków brzegowych. W pracach [1, 6, 7, 10, 11] analizowano drgania poprzeczne kół zębatach, modelowanych płytami kołowo-symetrycznymi, stosując metodę elementów skończonych (MES).

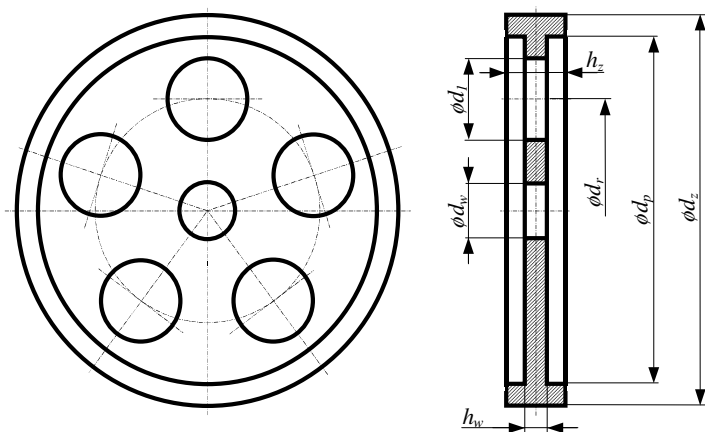
W publikacjach [5-11, 13] wykorzystano właściwości cyklicznej symetrii układów (płyt kołowo-symetrycznych, kół zębatach i innych) w procesie ana-

¹ Autor do korespondencji/corresponding author: Stanisław Noga, Politechnika Rzeszowska, al. Powstańców Warszawy 12, 35-959 Rzeszów, tel.: 178651639, e-mail: noga@prz.edu.pl.

lize ich drgań poprzecznych. Z kolei w pracach [2, 4, 12] analizowano drgania poprzeczne płyt kołowych z różnymi przypadkami niejednorodności geometrii (otwory przelotowe, dodatkowe pierścienie, zgrubienia na obrzeżach itp.). Do rozwiązania równań drgań wykorzystano zaproponowane modyfikacje metody elementów brzegowych. W niniejszej publikacji rozważane są drgania poprzeczne płyt kołowo-symetrycznych z mimośrodowymi otworami przelotowymi. Praca jest kontynuacją prac autora dotyczących numeryczno-eksperymentalnej analizy drgań poprzecznych płyt z zaburzoną geometrią [8, 11].

2. Sformułowanie zagadnienia

Jak wspomniano w przeglądzie literatury przedmiotu, układy typu płyty kołowe bądź pierścieniowe z różnymi przypadkami nieciągłości geometrycznych (otwory i szczeliny mimośrodowe, zgrubienia w postaci pierścieni lub piast, itp.) są wykorzystywane w procesie modelowania i analizy drgań takich układów mechanicznych jak koła zębate, koła kolejowe, turbiny silników lotniczych, itp. Zasadniczym celem niniejszej pracy jest zaproponowanie użytecznej w zastosowaniach inżynierskich metodyki analizy drgań poprzecznych płyt kołowych z nieciągłościami geometrycznymi w postaci mimośrodowych otworów przelotowych, usytuowanych na zadanym promieniu. Na rys. 1 przedstawiono model geometryczny przyjętego do rozważań układu.



Rys. 1. Model geometryczny rozważanego układu

Fig. 1. Geometry of the system under study

Podstawowe wymiary geometryczne (średnice, grubości) i dane techniczne rozważanego układu podano w tab. 1. Model składa się z płyty pierścieniowej z pierścieniem na obrzeżu i pięcioma otworami mimośrodowymi, wykonanymi na zadanym promieniu. Kształt analizowanego układu odnosi się

do często spotykanych rozwiązań konstrukcyjnych kół zębatych przekładni lotniczych, gdzie w celu zmniejszenia wagi wykonuje się otwory przelotowe w tarczy koła.

Tabela 1. Parametry techniczne rozważanego układu
 Table 1. Technical parameters characterizing the system under study

d_z mm	d_p mm	d_r mm	ρ kg/m ³	d_w mm	d_l mm	h_z mm	H_w mm	E Pa	ν
110.09	98	62.7	$7.85 \cdot 10^3$	15.2	22.4	7	2.29	$2.1 \cdot 10^{11}$	0.28

W procesie analizy wykorzystuje się metodę elementów skończonych i komercyjny program ANSYS. Analiza dynamiczna związana z wyznaczeniem wartości częstości drgań własnych stanowi istotne ogniwo procesu projektowania konstrukcji (w szczególności w przemyśle lotniczym). W praktyce inżynierskiej identyfikację poszczególnych częstości drgań własnych dokonuje się na podstawie kształtu odpowiadających im form własnych. W przypadku płyty litej zadanie to nie stanowi złożonego problemu. Dla układów o niejednorodnej geometrii (np. układ z rys. 1), postaci ulegają zniekształceniu w porównaniu do układu o regularnej geometrii. W pracach [1, 7, 10] przedstawiono algorytm pozwalający ustalić odpowiedniość między formami drgań płyty litej i płyty z mimośrodowymi otworami przelotowymi. Podejście to stanowi atrakcyjną z punktu widzenia zastosowań inżynierskich, alternatywę dla rozwiązań proponowanych w pracach [2, 4, 12]. Jednym z zasadniczych celów niniejszej pracy jest weryfikacja eksperymentalna wyników rozwiązań numerycznych. Zgodnie z klasyczną teorią drgań poprzecznych litych płyt kołowych i pierścieniowych, dla każdego rozwiązania, dla którego linie węzłowe tworzą średnice węzłowe, otrzymuje się dwa identyczne układy prostych węzłowych, obróconych względem siebie o kąt [1, 3, 7]:

$$\alpha = \pi / (2n) \tag{1}$$

gdzie: n - liczba średnic węzłowych.

Zgodnie z przyjętymi standardami w teorii płyt kołowo-symetrycznych [3], w niniejszej pracy poszczególne częstości własne oznacza się przez ω_{mn} gdzie m odnosi się do liczby okręgów węzłowych a n to wspomniana wcześniej liczba średnic węzłowych. Należy się spodziewać, że otwory przelotowe spowodują zniekształcenie linii węzłowych postaci własnych drgań giętnych. Ponadto, dla niektórych przypadków częstości, gdzie występują podwójne rozwiązania, pojawią się dwie różne wartości i odpowiadające im dwie postaci własne o różnych kształtach [1, 2, 4, 7, 12]. Dotyczy to rozwiązań, w których linie węzłowe tworzą średnice węzłowe. W rozważanym przypadku na-

leży się spodziewać rozdzielenia wartości dla częstości ω_{15} i ω_{25} . Zagadnienie to zostanie omówione w dalszej części pracy. Jakość opracowanych modeli numerycznych określa się wyznaczając błąd względny częstości, zdefiniowany zgodnie z zależnością [7]:

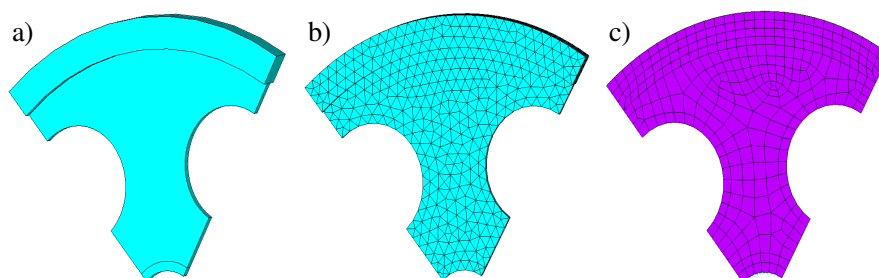
$$\varepsilon = (\omega^f - \omega^e) / \omega^e \times 100[\%] \quad (2)$$

gdzie: ω^f – to częstość własna z modelu numerycznego,
 ω^e – to częstość własna układu rzeczywistego.

Równanie (2) jest w literaturze przedmiotu nazywane tzw. błędem częstości [7].

3. Modele MES rozważanych układów

W procesie budowy modeli MES rozważanego układu, wykorzystano właściwości cyklicznej symetrii układu. Zasadnicza atrakcyjność polega na wykorzystaniu w analizie drgań reprezentatywnego segmentu, stanowiącego fragment rozważanego układu kołowo-symetrycznego. Podejście takie pozwoliło na znaczne zmniejszenie rozmiaru modeli MES. Efektywność tego rodzaju modeli w porównaniu do pełnych modeli omówiono szerzej w pracach [5, 7, 9-11, 13]. W rozważanym przypadku do opracowania modeli z cykliczną symetrią wykorzystuje się segment (rys. 2a) stanowiący jedną piątą część modelu układu z rys. 1.

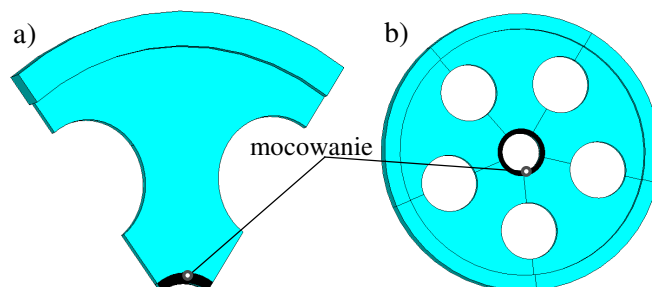


Rys. 2. (a) model z cykliczną symetrią, (b) pierwszy model MES, (c) drugi model MES

Fig. 2. (a) cyclic symmetry model, (b) first FEM model, (c) second FEM model

Dane techniczne analizowanego układu podano w tab. 1. Rozważane są dwa modele MES płyty. Pierwszy model MES (bryłowy) opracowano z wykorzystaniem elementu bryłowego czworobocznego (solid187), dziesięciowzłowego o trzech stopniach swobody w każdym węźle. W drugim modelu MES (powierzchniowy) zastosowano element powierzchniowy ośmiowzłowy (shell281) o sześciu stopniach swobody w każdym węźle. W procesie nakładania siatki w poszczególnych modelach wykorzystano standardowe pro-

cedury programu ANSYS. W przypadku pierwszego modelu założono, że długość krawędzi elementu nie przekracza 2.3 [mm], co stanowi wartość równą grubości cieńszego obszaru płyty (tab. 1). Model ten zawiera 3461 elementów bryłowych. W drugim modelu MES przyjęto, że długość krawędzi elementu na obrzeżach ciała wynosi około 2 [mm]. Model nr 2 zawiera 414 elementów powierzchniowych. Wygenerowane modele pokazano na rys. 2b-c. W opracowanych modelach występuje dwa rodzaje warunków brzegowych.



Rys. 3. Warunki brzegowe: (a) model z cykliczną symetrią, (b) model po rozwinięciu

Fig. 3. Boundary conditions: (a) cyclic symmetry model, (b) expanded model

Pierwszy rodzaj warunków brzegowych wynika z uwzględnienia właściwości cyklicznej symetrii i są nakładane systemowo (automatycznie przez stosowne procedury programu ANSYS). Drugi rodzaj warunków brzegowych wynika z przewidywanego mocowania układu w eksperymencie pomiarowym. W tym przypadku warunki brzegowe uwzględniające mocowanie nałożono na węzły. W każdym modelu węzłom leżącym na powierzchni oznaczonej *mocowanie* (rys. 3a-b) odebrano stopień swobody związany z przemieszczeniem węzłów wzdłuż osi symetrii osiowej każdego modelu. Warto podkreślić, że liczba elementów modelu bryłowego MES jest ponad ośmiokrotnie większa w porównaniu do liczby elementów modelu powierzchniowego MES.

4. Analiza doświadczalna

W niniejszym rozdziale omówiono badania doświadczalne przeprowadzone w celu weryfikacji zaproponowanych modeli MES układu i metodyki związanej z oznaczaniem zdeformowanych otworami postaci drgań własnych poprzecznych płyty. W pewnym ograniczonym zakresie badania te prezentowano w pracach [6, 8]. W doświadczeniu wykorzystano układ pomiarowy Polytec (rys. 4), składający się z wibrometru laserowego PSV-400, systemu przetwarzania danych Polytec DMS DATA MANAGEMENT SYSTEM, czujników piezoelektrycznych NOLIAC typu CMAP03, CMAP06, wzbudnika elektrodynamicznego TIRAvib5200 oraz generatora sygnału typu TGA12101

firmy Textronics. Eksperyment pomiarowy zaplanowano i przeprowadzono tak aby zidentyfikować częstości własne odpowiadające formom własnym drgań poprzecznych rozważanych układów. Na potrzeby eksperymentu wykonano cztery obiekty o geometrii pokazanej na rys. 1 i średnicach otworów przelotowych d_1 podanych w tabeli 2. Wymiary geometryczne i dane materiałowe wykonanych układów zamieszczono w tabeli 1.



Rys. 4. Eksperyment pomiarowy

Fig. 4. The measuring experiment

Tabela 2. Średnice otworów przelotowych

Table 2. Diameters of the through holes

n	1	2	3	4
d_1 mm	0	7.28	15.68	22.4

Obiekty pobudzano sygnałem harmonicznym i następnie w paśmie 20-30 [kHz] szumem losowym (ang. *Pseudo Random*). Na powierzchni każdego obiektu ustalono siatkę punktów pomiarowych. Dla poszczególnych obiektów liczba przyjętych punktów pomiarowych mieściła się w zakresie od 500 do 1000. W każdym takim punkcie mierzono odpowiedź układu w kierunku poprzecznym wibrometrem laserowym. Wartości wzbudzonych i zidentyfikowanych częstości drgań własnych poprzecznych, omawianych obiektów, zamieszczono w tabelach 3-6.

Tabela 3. Częstości drgań własnych ω_{mn} [Hz] (wyniki badań, płyta pełna)

Table 3. The natural frequencies ω_{mn} [Hz] (research results, the solid plate)

$m \setminus n$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
1	824.2	515.6	1456.3	4057	7704.7	12231.3	17532.8	23437.5	29867.2
2	5146.9	5878.1	7637.5	10921.9	15026.6	19984.4	25410.2	-	-
3	13736	14132.8	17828.1	21894.5	27578	-	-	-	-

Tabela 4. Częstotliwości drgań własnych ω_{mn} [Hz] (wyniki badań, płyta z otworami o średnicy $d_l = 7.28$ [mm])

Table 4. The natural frequencies ω_{mn} [Hz] (results of investigations, the plate with holes diameter $d_l = 7.28$ [mm])

$\begin{matrix} n \\ m \end{matrix}$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
1	780.5	443.8	1441.4	4014.5	7632.8	12125	17328.1	23097.7	29289.1
2	4890.6	5339.8	7253.9	10425	14441.4	18871.1 19246.1	24171.9	-	-
3	13052	13412.5	16386.7	20722.7	26191.4	-	-	-	-

Tabela 5. Częstotliwości drgań własnych ω_{mn} [Hz] (wyniki badań, płyta z otworami o średnicy $d_l = 15.68$ [mm])

Table 5. The natural frequencies ω_{mn} [Hz] (results of investigations, the plate with holes diameter $d_l = 15.68$ [mm])

$\begin{matrix} n \\ m \end{matrix}$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
1	740.6	490.6	1425.4	4000.8	7581.3	12078.1	17183.6	22695.3	28023.4
2	4859.4	5618.8	7074.2	10489.1	14032.8	16859.4 20843.6	23050.7	-	-
3	11860.9	12203	14953	19171.9	24304.7	-	-	-	-

Przy identyfikacji postaci płyty z otworami, pomocne były wyniki otrzymane z modeli MES obiektów (omówione w następnym rozdziale). Istotna w tym przypadku była znajomość deformacji kształtu postaci z powodu otworów przelotowych. W przypadku częstości ω_{15} i ω_{25} dla płyt z otworami zidentyfikowano po dwie postaci własne o różnym kształcie i różnych wartościach odpowiadających im częstości. Wyniki te potwierdzają wcześniejsze spostrzeżenia zawarte w pracach [4, 12] nt. rozdzielenia wartości częstości własnych, odpowiadających postaciom, których liczba średnic węzłowych stanowi całkowitą krotność liczby otworów przelotowych.

Tabela 6. Częstotliwości drgań własnych ω_{mn} [Hz] (wyniki badań, płyta z otworami o średnicy $d_l = 22.4$ [mm])

Table 6. The natural frequencies ω_{mn} [Hz] (results of investigations, the plate with holes diameter $d_l = 22.4$ [mm]).

$\begin{matrix} n \\ m \end{matrix}$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
1	716.8	409.4	1424.2	4000.4	7642.2	11885.9 12265.6	17480	22988.3	29117.2
2	5276.6	5868.8	7278.1	12460.9	15085.9	17707 21703.1	22914.1	-	-
3	11923	12565.6	15134.4	19410.2	24898.4	-	-	-	-

5. Analiza numeryczna

Dla zdefiniowanych wcześniej modeli MES prowadzono obliczenia, wyznaczając częstości własne i odpowiadające im postacie drgań własnych poprzecznych. Dla wszystkich badanych obiektów opracowano modele MES zgodnie z zasadami omówionymi w rozdziale 2. Analizę prowadzono w szerokim zakresie częstotliwości, gdzie górna granica odnosi się do częstotliwości własnej ω_{18} , związanej z ośmioma średnicami węzłowymi postaci giętej. Przy identyfikacji niektórych postaci konieczne było stosowanie algorytmu ustalania odpowiedniości między formami drgań płyty litej i płyty z mimośrodkowymi otworami przelotowymi, który omówiono w pracach [1, 7, 10]. Wyniki z analizy MES (formy własne) porównano wizualnie z rezultatami badań doświadczalnych. Podobnie jak poprzednio, w obu przypadkach modeli MES płyt z otworami, zauważa się rozdzielenie wartości dla częstotliwości własnych ω_{15} i ω_{25} . Każdej z wartości odpowiada inna postać własna. Z powodu ograniczeń wydawniczych, w tab. 7-12 zamieszczono jedynie błędy częstości (2), wyznaczone dla poszczególnych modeli MES układów (w przypadku płyty pełnej i płyty z otworami o średnicy $d_l = 22.4$ [mm] dla obu modeli, w pozostałych przypadkach płyt jedynie dla modelu powierzchniowego).

Tabela 7. Błąd częstości ε_{mn} [%] (płyta pełna, porównanie wyników badań z wynikami obliczeń numerycznych, model bryłowy MES)

Table 7. The frequency error ε_{mn} [%] (solid plate, comparison of the results of investigations with the results of numerical calculations)

$m \ n$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
1	-0.33	13.77	4.4	1.28	0.72	0.53	0.24	0.11	-0.1
2	5.8	2.01	1.85	-0.47	-0.38	-1.14	-1.17	-	-
3	4.29	7.68	0.24	1.14	0.56	-	-	-	-

Tabela 8. Błąd częstości ε_{mn} [%] (płyta pełna, porównanie wyników badań z wynikami obliczeń numerycznych, model powierzchniowy MES)

Table 8. The frequency error ε_{mn} [%] (solid plate, comparison of the results of investigations with the results of numerical calculations, FEM shell model)

$m \ n$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
1	-0.37	13.23	4.24	1.19	0.6	0.36	-0.01	-0.23	-0.55
2	5.4	1.62	1.61	-0.55	-0.46	-1.29	-1.45	-	-
3	4.0	7.19	-0.43	0.38	-0.27	-	-	-	-

Najlepsze rezultaty zauważa się w odniesieniu do modeli MES płyty litej. W obu przypadkach modeli MES płyty zauważa się podobne wartości błędów dla poszczególnych częstości. Nieznacznie korzystniej wypada model powierzchniowy MES (jedynie dla ośmiu z dwudziestu jeden częstości, błędy

częstości są nieznacznie większe w porównaniu do wyników modelu bryłowego, w pozostałych przypadkach mniejsze). Wyniki modelowania MES płyty litej można uznać za satysfakcjonujące.

Tabela 9. Błąd częstości ϵ_{mn} [%] (płyta z otworami o średnicy $d_I = 7.28$ [mm], porównanie wyników badań z wynikami obliczeń numerycznych, model powierzchniowy MES)

Table 9. The frequency error ϵ_{mn} [%] (the plate with holes diameter $d_I = 7.28$ [mm], comparison of the results of investigations with the numerical calculations, FEM shell model).

$m \setminus n$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
1	4.6	30.6	5.06	2.09	1.36	0.97	0.87	0.82	0.73
2	10.12	11.02	6.04	3.23	2.55	2.43 2.31	2.2	-	-
3	8.42	11.73	6.76	4.22	3.02	-	-	-	-

Tabela 10. Błąd częstości ϵ_{mn} [%] (płyta z otworami o średnicy $d_I = 15.68$ [mm], porównanie wyników badań z wynikami obliczeń numerycznych, model powierzchniowy MES)

Table 10. The frequency error ϵ_{mn} [%] (the plate with holes diameter $d_I = 15.68$ [mm], comparison of the results of investigations with the results of numerical calculations, FEM shell model)

$m \setminus n$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
1	6.78	13.84	5.58	2.13	1.84	1.43	1.8	1.74	2.75
2	13.16	7.71	9.35	5.87	5.08	4.5 2.97	5.48	-	-
3	12.54	14.9	9.43	6.65	6	-	-	-	-

Tabela 11. Błąd częstości ϵ_{mn} [%] (płyta z otworami o średnicy $d_I = 22.4$ [mm], porównanie wyników badań z wynikami obliczeń numerycznych, model bryłowy MES)

Table 11. The frequency error ϵ_{mn} [%] (the plate with holes diameter $d_I = 22.4$ [mm], comparison of the results of investigations with the results of numerical calculations, FEM solid model)

$m \setminus n$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
1	3.61	26.92	5.16	2.23	2.15	1.43 1	2.42	1.56	1.88
2	10.29	8.52	6.52	4.39	4.04	2.24 3.62	7.55	-	-
3	10.84	10.52	8.81	6.52	5.24	-	-	-	-

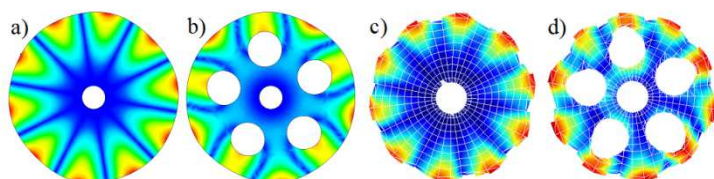
Tabela 12. Błąd częstości ϵ_{mn} [%] (płyta z otworami o średnicy $d_I = 22.4$ [mm], porównanie wyników badań z wynikami obliczeń numerycznych, model powierzchniowy MES)

Table 12. The frequency error ϵ_{mn} [%] (the plate with holes diameter $d_I = 22.4$ [mm], comparison of the results of investigations with results of numerical calculations, FEM shell model)

$m \setminus n$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
1	3.43	26.23	4.96	2.12	2.01	1.27 0.83	2.16	1.21	1.47
2	9.88	8.05	6.11	4.25	3.81	2.06 3.36	7.2	-	-
3	10.08	9.69	7.71	5.43	4.15	-	-	-	-

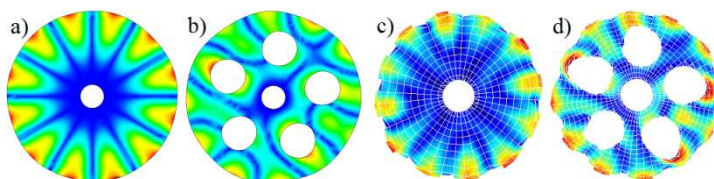
W przypadku płyt z otworami wyniki są mniej korzystne w porównaniu do poprzednio omawianych, ale także można zauważyć w obydwu przypadkach modeli MES płyt podobne wartości błędów odnoszących się do poszczególnych częstotliwości (tab. 11-12).

Podobnie jak poprzednio w tym przypadku płyt, korzystniej wypada model powierzchniowy MES (dla wszystkich częstotliwości własnych błędy częstotliwości modelu powierzchniowego są mniejsze od stosownych błędów z modelu bryłowego). Atrakcyjniejszym wydaje się być model powierzchniowy MES układu. Na rys. 5-8 pokazano wybrane postacie drgań własnych poprzecznych otrzymane z badanych obiektów i rozwiązań MES. Kształty zidentyfikowanych w eksperymencie form nie są tak regularne jak otrzymane z rozwiązań MES, ale wystarczająco rozpoznawalne i zadowalające.



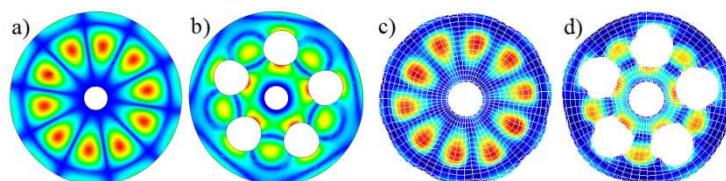
Rys. 5. Postacie drgań odpowiadające częstotliwości ω_{15} : (a-b) model powierzchniowy MES, (c-d) badania eksperymentalne

Fig. 5. Vibration modes related to frequency ω_{15} : (a-b) FEM shell model, (c-d) experimental investigations



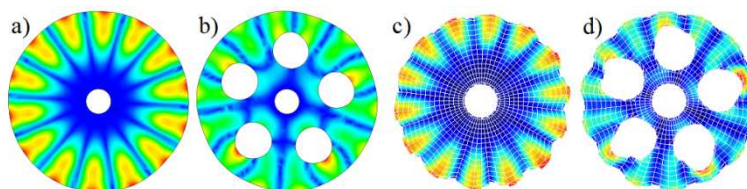
Rys. 6. Postacie drgań odpowiadające częstotliwości ω_{16} : (a-b) model powierzchniowy MES, (c-d) badania eksperymentalne

Fig. 6. Vibration modes related to frequency ω_{16} : (a-b) FEM shell model, (c-d) experimental investigations



Rys. 7. Postacie drgań odpowiadające częstotliwości ω_{25} : (a-b) model powierzchniowy MES, (c-d) badania eksperymentalne

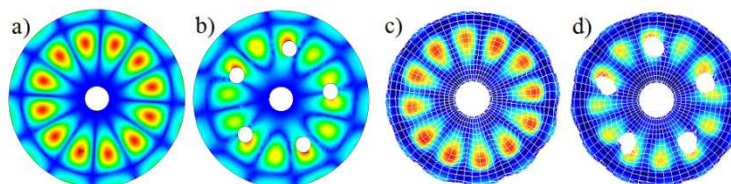
Fig. 7. Vibration modes related to frequency ω_{25} : (a-b) FEM shell model, (c-d) experimental investigations



Rys. 8. Postacie drgań odpowiadające częstości ω_{17} : (a-b) model powierzchniowy MES, (c-d) badania eksperymentalne

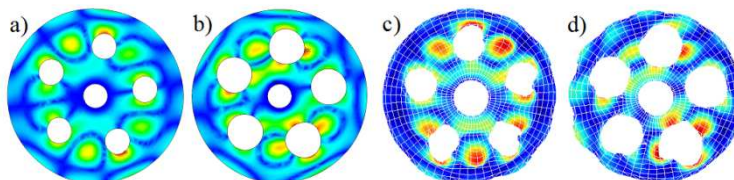
Fig. 8. Vibration modes related to frequency ω_{17} : (a-b) FEM shell model, (c-d) experimental investigations

W dalszej kolejności omówione zostaną rezultaty badań numerycznych i doświadczalnych odnoszących się do proponowanej w pracach [1, 7, 10] procedury pozwalającej ustalić odpowiedniość między formami drgań płyty litej i płyty z mimośrodowymi otworami przelotowymi. Wyniki te omówimy na przykładzie form własnych odnoszących się do częstości własnej ω_{26} . Na rys. 9-10 pokazano postacie własne otrzymane z modeli powierzchniowych MES i eksperymentu dla czterech obiektów o średnicach otworów przelotowych d_i (rys. 1) zmieniających się zgodnie z tab. 2.



Rys. 9. Postacie drgań odpowiadające częstości ω_{26} : (a-b) model powierzchniowy MES, (c-d) badania eksperymentalne

Fig. 9. Vibration modes related to frequency ω_{26} : (a-b) FEM shell model, (c-d) experimental investigations



Rys. 10. Postacie drgań odpowiadające częstości ω_{26} : (a-b) model powierzchniowy MES, (c-d) badania eksperymentalne

Fig. 10. Vibration modes related to frequency ω_{26} : (a-b) FEM shell model, (c-d) experimental investigations

Otworki przelotowe powodują deformację linii węzłowych. Jest to zauważalne zarówno w rozwiązaniach MES jak i w wynikach badań doświadczalnych

nych. Podobnie jak w poprzednio omawianych przypadkach, zauważa się znaczne podobieństwo odpowiadających sobie form otrzymanych z rozwiązań MES i eksperymentu. Zarówno wyniki rozwiązań MES jak i rezultaty badań doświadczalnych pozwalają prześledzić deformację linii węzłowych z powodu nieciągłości geometrycznych badanych obiektów. Warto podkreślić, że omawiane badania prowadzono w szerokim zakresie częstotliwości (400-30000 [Hz]).

6. Uwagi i wnioski

W pracy rozważane są zagadnienia drgań poprzecznych płyt kołowo-symetrycznych z zaburzoną geometrią. W procesie analizy wykorzystano metodę elementów skończonych oraz badania doświadczalne. Rozważono płyty pierścieniowe z nieciągłościami geometrycznymi typu otwory przelotowe oraz zgrubienie obrzeża płyty. W badaniach symulacyjnych stosowano modele bryłowe i powierzchniowe MES. Korzystniejsze wyniki (błędy częstości, rozmiary modeli) uzyskano w przypadku stosowania modeli powierzchniowych MES. Prezentowane badania symulacyjne i doświadczalne potwierdziły występowanie opisanego w literaturze przedmiotu zjawiska rozdzielania wartości częstości własnych, odpowiadających postaciom, których liczba średnic węzłowych równa jest krotności liczby otworów przelotowych. Z punktu widzenia zastosowań inżynierskich, zaproponowana w pracy metodyka analizy drgań układów kołowo-symetrycznych z zaburzoną geometrią, stanowi atrakcyjną alternatywę dla dostępnych w literaturze rozwiązań numerycznych omawianych zagadnień. Zasadnicza atrakcyjność wynika z zastosowania w procesie analizy komercyjnego oprogramowania ANSYS.

Literatura

- [1] Bogacz R., Noga S.: Free transverse vibration analysis of a toothed gear, Arch. Appl. Mech., 82 (2012) 1159-1168.
- [2] Lee W.M., Chen J.T.: Free vibration analysis of a circular plate with multiple circular holes by using indirect BIEM and addition theorem, ASME J. Appl. Mech., 78 (2011) 011015-1-10.
- [3] Leissa A.W.: Vibration of plates, NASA SP 160, US Government Printing Office, 1969 (reprinted by The Acoustical Society of America, 1993).
- [4] Nagaya K., Poltorak K.: Method for solving eigenvalue problems of the Helmholtz equation with a circular outer and a number of eccentric circular inner boundaries, J. Acoustical Soc. America, 85 (1989) 576-581.
- [5] Naserlavi S.S., Salajegheh E., Salajegheh J., Fadaee M.J.: Detection of damage in cyclic structures using an eigenpair sensitivity matrix, Computers Structures, 110-111 (2012) 43-59.
- [6] Nazarko P., Ziemiański L., Noga S., Markowski T.: Comparative analysis of compound annular plates vibration on the basis of numerical and experimental

- studies, Proc. 3rd Polish Congres of Mechanics & 21st International Conference on Computer Methods in Mechanics, Gdańsk, 2015, pp. 421-422.
- [7] Noga S.: Analityczne i numeryczne zagadnienia drgań układów z symetrią kołową, OW PRZ, Rzeszów, 2015.
- [8] Noga S.: Numerical and experimental analyses of vibrations of annular plates with multiple eccentric holes, *Strength Materials*, 48 (2016) 524-532.
- [9] Noga S.: Transverse vibration analysis of a compound plate with using cyclic symmetry modeling, *Vibrations Physical System*, 26 (2014) 211-216.
- [10] Noga S., Bogacz R.: Algorithm to identify the mode shapes of the circular or annular systems with the discontinuous features, Proc. 20th Int. Conf. Computer Methods in Mechanics, Poznań, 2013, MS07-5-6.
- [11] Noga S., Bogacz R., Frischmuth K.: Vibration analysis of toothed gear with cyclic symmetry modelling, *Vibration Physical System*, 25 (2012) 299-304.
- [12] Vinayak H., Singh R.: Eigensolutions of annular-like elastic disks with intentionally removed or added material, *J. Sound Vibration*, 192 (1996) 741-769.
- [13] Wang S., Xiu J., Cao S., Liu J.: Analytical treatment with rigid-elastic vibration of permanent magnet motors with expanding application to cyclically symmetric power-transmission systems, *ASME J. Vibration Acoustics*, 136 (2014) 021014-1-13.

FREE VIBRATION ANALYSIS OF ANNULAR PLATES WITH ECCENTRIC HOLES

Summary

This paper discusses the free transverse vibrations of the annular plates with the geometrical discontinuities in the form of eccentric holes and rim. The finite element method and the experimental studies are employed. The commercial ANSYS software is used in the numerical calculations. The solid finite element models and the shell finite element models are used in the analysis. During the experimental tests the latest laser measurement techniques are used. Discussed in this paper the numerical and experimental research confirm the existence of the phenomenon of dividing natural frequency values corresponding to the mode shapes where the number of nodal diameters is a factor of the number of through holes. Presented method of the analysis of transverse vibrations of annular plates with eccentric through holes may be useful for engineering applications.

Keywords: transverse vibrations, distorted normal modes, cyclic symmetry models

DOI: 10.7862/rm.2016.28

Otrzymano/received: 17.11.2016 r.

Zaakceptowano/accepted: 12.12.2016 r.