Humanities and Social Sciences 2018
HSS, vol. XXIII, 25 (3/2018), p. 99-113 July-September

Krzysztof JAWORSKI[1]

CZY LICZBY ISTNIEJĄ? REKONSTRUKCJA SPORU O ISTNIENIE PRZEDMIOTÓW MATEMATYCZNYCH

Artykuł przedstawia przegląd filozoficznych stanowisk w kwestii sporu o istnienie przedmiotów matematycznych. W pierwszej części zaprezentowana jest geneza pojęć liczby i liczebności, u których podstaw stoi znana z teorii mnogości relacja równoliczności zbiorów. Następnie podano krótkie streszczenia stanowisk intuicjonistycznego i realistycznego w filozofii matematyki. Według intuicjonistów matematyka to wynik pewnej funkcjonalności intelektu, życiowej aktywności rozumu. Zwykle przyjmuje się, że cena obrony doktryny intuicjonistycznej jest bardzo wysoka (intuicjonizm odrzuca między innymi nieskończoność aktualną). Realizm, zwany również platonizmem, jest stanowiskiem, zgodnie z którym abstrakcyjne przedmioty matematyczne istnieją niezależnie od jakiegokolwiek umysłu. Centralną część pracy zajmuje porównanie poglądu realistycznego z antyrealistycznym (intuicjonistycznym) oraz prezentacja argumentów, które mogłyby przemawiać za każdym z tych stanowisk. Omówiono tam między innymi nominalizm Hartry'ego Fielda (zwany również fikcjonalizmem), realizm nominalistyczny Marka Balaguera i słynny „argument z niezbędności" Quine'a. Ważną część artykułu stanowi próba odpowiedzi na pytanie o związek przyczynowy między światem przedmiotów matematycznych a światem zjawisk przyrodniczych. Jest to próba odpowiedzi na pytanie, czy świat został stworzony według jakiegoś wzoru matematycznego, którego skrawki przez całe wieki żmudnie odkrywamy, czy raczej matematyka jest specyficznie ludzkim sposobem odczytywania świata i gdyby nie człowiek, to żadnej matematyki by nie było. Na końcu wysunięta jest propozycja nowego sposobu ujęcia przedmiotów matematycznych jako „fenomenalnych" tworów naszego umysłu.

Słowa kluczowe: nominalizm, intuicjonizm, konstruktywizm, platonizm, liczba, realizm, fikcjonalizm.

1. WSTĘP

Próba odpowiedzi na pytanie „Czym jest liczba?" sięga samego rdzenia ontologicznych dociekań dotyczących świata. Spór o istnienie przedmiotów matematycznych, rozpoczęty już w starożytności, trwa po dziś dzień. Mimo to nie jest on dyskusją jałową czy archaiczną. Formułowane są coraz nowsze argumenty na rzecz każdego z możliwych stanowisk. Celem tej pracy jest syntetyczna prezentacja istoty sporu oraz sposobów argumentacji na rzecz realizmu i antyrealizmu matematycznego. Postawimy też pytanie o związek przyczynowy między światem matematycznym a światem zjawisk przyrodniczych. W końcu, unikając pułapek konstruktywizmu, zaproponujemy – jak się wydaje – nowy, niestandardowy

[1] Ks. dr Krzysztof Jaworski, Uniwersytet Szczeciński, Wydział Teologiczny, Katedra Filozofii Chrześcijańskiej; e-mail: kjaw007@gmail.com.
Krzysztof Jaworski, PhD, University of Szczecin, Faculty of Theology, Department of Christian Philosophy; e-mail: kjaw007@gmail.com.

sposób pojmowania przedmiotów matematycznych jako „fenomenalnych” tworów naszego umysłu.

2. SKĄD SIĘ WZIĘŁY LICZBY?

Antropolodzy, badający matematyczne kompetencje człowieka, zwracają często uwagę na to, że należy odróżnić spontaniczne poczucie numeryczne od abstrakcyjnego ujmowania liczby. To pierwsze jest własnością ludzkiej natury, wyposażonej w zdolność liczenia, i można je zauważyć już u plemion prymitywnych. Jest ono związane z percepcją bezpośrednią, „odczuwaniem” liczebności podobnie, jak się odczuwa zapach lub smak. Abstrakcyjne ujęcie liczby natomiast to już wyrafinowana operacja rozumu. Operacja ta wymaga pewnego intencyjnego wysiłku intelektualnego.

Pierwszymi pojęciami numerycznymi, zrozumiałymi dla istoty ludzkiej, były pojęcia dotyczące jedności, pary i wielości: „jeden”, „dwa” oraz „dużo”. Wiele języków, zarówno starożytnych, jak i współczesnych, wykazuje znamiona tych podstawowych rozróżnień – choćby rozróżnienie gramatyczne między liczbą pojedynczą, podwójną i mnogą. W egipskim piśmie obrazkowym czasów faraonów powtarzano trzy razy ten sam hieroglif nie tylko na oznaczenie trzech przedmiotów, ale również po to, by wskazać, że przedmiotów tych jest po prostu wiele.

Z kolei w starym języku chińskim pojęcie lasu przedstawiano poprzez potrójne powtórzenie piktogramu drzewa. Badania wykazały, że człowiek jest w stanie w sposób spontaniczny, jednym „rzutem oka” podać liczbę jednego, dwóch, trzech, a nawet czterech przedmiotów. Jednakże kiedy liczba przedmiotów przekracza cztery, umysł ulega zaciemnieniu – nie jest w stanie ująć w jedno widzianych przedmiotów. Łatwo to dostrzec, biorąc liczby jeszcze większe: widząc kosz, w którym znajduje się jedenaście jabłek, nie jesteśmy w stanie jednym „oglądem” ująć tej jedenastki; żeby podać liczbę jabłek, musimy je policzyć, a to już wykracza poza naturalną zdolność numeryczną (która *de facto* w pewnej mierze przysługuje również niektórym zwierzętom) i wymaga kompetencji matematycznych[2].

Żeby lepiej pokazać ewolucję pojęcia liczby, odwołamy się najpierw do pewnego eksperymentu myślowego. Wyobraźmy sobie, że jesteśmy człowiekiem, który nie przeszedł żadnej edukacji matematycznej – nie wiemy, co to jest liczba, czym jest operacja dodawania, odejmowania, mnożenia itd. Powiedzmy, że jesteśmy dzieckiem na tyle dojrzałym, by rozumieć, co się wokół nas dzieje, ale na tyle niewykształconym, by nie wiedzieć nic na temat liczenia. Wyobraźmy sobie następnie, że mamy siostrę o podobnym stanie dojrzałości matematycznej i że mama przynosi nam garść orzechów, mówiąc: „Podzielcie orzechy równo między siebie”. Gdybyśmy potrafili liczyć, sprawa byłaby prosta – trzeba by wówczas policzyć wszystkie orzechy, następnie otrzymaną liczbę podzielić przez dwa, po czym odliczyć orzechy zgodnie z otrzymanym wynikiem (ewentualnie stoczyć bitwę o pozostałego orzecha, gdyby pierwotna liczba orzechów była nieparzysta). Jednak w naszym wypadku tak się nie da, ponieważ – przypomnijmy – nie potrafimy liczyć. Czy zatem istnieje sposób, by sprawiedliwie podzielić orzechy, nie posługując się liczbą? Oczywiście tak. Wystarczy wysypać orzechy na stół, a następnie zabierać na przemian po jednym („raz ty, raz

[2] Zob. G. Ifrah, *Dzieje liczby, czyli historia wielkiego wynalazku*, Wrocław–Warszawa–Kraków–Gdańsk 1990, s. 13–15; B. Brożek, M. Hohol, *Umysł matematyczny*, Kraków 2017, s. 42–59.

ja") aż stół pozostanie pusty (ewentualnie stoczyć bitwę o pozostałego orzecha, gdyby pierwotna liczba orzechów była nieparzysta). Skutkiem takiej operacji jest równy podział, mimo że nie wiemy, ile mamy orzechów.

Ten prymitywny eksperyment być może niewiele na razie mówi na temat liczby, ale wyraża jedno z najważniejszych pojęć współczesnej teorii mnogości – pojęcie równoliczności. Mówimy formalnie, że dwa zbiory są równoliczne wówczas, gdy istnieje funkcja przekształcająca wzajemnie jednoznacznie jeden zbiór na drugi zbiór. Dwa równoliczne zbiory posiadają dokładnie tę samą liczbę elementów. Okazuje się, że prototypem liczb były pewne wzorce rachunkowe, wykorzystujące równoliczność. Kiedy nie dysponowano jeszcze abstrakcyjnym pojęciem liczby, prawdopodobnie tylko ustalano wzajemnie jednoznaczną odpowiedniość pomiędzy liczonymi przedmiotami a ustalonym wzorcem. Stwierdzano przykładowo, że przedmiotów jest tyle, ile palców, oczu lub nacięć na desce, a to już dawało jakieś konkretne wyobrażenie liczebności (wielkości). Zresztą jeszcze do niedawna używano powszechnie liczydeł do wykonywania różnorakich obliczeń. Poza tym, nawet dziś wielu z nas lubi wykonywać „na palcach" proste czynności rachunkowe. Z czasem poszczególnym wielkościom liczebnym zaczęto nadawać nazwy. Przykładowo mając tyle orzechów, co rąk, można powiedzieć, że ma się „dwa" orzechy. Powiemy: „»Dwa« to tyle, ile rąk ma zdrowy człowiek". Żeby to lepiej zrozumieć, wcielmy się znowu w dziecko pozbawione wszelkich pojęć matematycznych. Czy słowo „siedem" mówiłoby nam cokolwiek, gdybyśmy wcześniej nie doświadczyli jakiejś „naoczności" liczby siedem (siedmiu kamyków, siedmiu uszczypnięć w rękę czy siedmiu uderzeń zegara)? Wydaje się, że nie. Siedem trzeba jakoś „unaocznić" – zobaczyć (usłyszeć, poczuć). Zanim zrozumieliśmy, co to „siedem", ktoś musiał nam powiedzieć, pokazując jednocześnie siedem palców lub szczypiąc nas siedmiokrotnie: „Siedem to dokładnie »tyle«". Potem już sami doszliśmy do wniosku, że wszystkiego, co jest równo licznie z »tyle«, jest właśnie dokładnie siedem. Dopiero na podstawie tego wzorca mogliśmy utworzyć pojęcie liczby siedem, nieodzowne dla abstrakcji matematycznej. W codziennym życiu ciągle stosujemy jakieś wzorce liczbowe. Nikt z nas nie wie „na oko", ile to metr, godzina czy kilogram – posługujemy się linijkami, zegarami, wagami. Zegarmistrz nie reguluje „na oko" budowanego przez siebie zegara – potrzebuje jakiegoś wzorca czasu, zgodnie z którym ustawi prędkość działania mechanizmu. Pojęcie liczebności ściśle związane jest z pojęciem liczby naturalnej. W teorii mnogości mówimy, że zbiór jest przeliczalny, gdy posiada skończoną liczbę elementów (wówczas możemy w skończonej liczbie kroków przeliczyć jego elementy) lub jest równoliczny ze zbiorem liczb naturalnych (wówczas jest to zbiór nieskończony, ale możemy podać metodę, zgodnie z którą ustawimy wszystkie jego elementy w ciąg – każdej liczbie naturalnej przyporządkujemy dokładnie jeden element tego zbioru). Pojęcie liczby naturalnej jest bodaj najmniej kontrowersyjnym pojęciem matematycznym. Współczesna matematyka dostarcza jednak wielu przykładów liczb „kłopotliwych", jak liczby rzeczywiste, niewymierne czy urojone. Pojęcie pierwiastka kwadratowego liczby dwa nie jest intuicyjne, ponieważ jest to liczba niewymierna – nie da się jej przedstawić w postaci ułamka zwykłego $\frac{m}{n}$, gdzie m i n byłyby liczbami całkowitymi. Przybliżona wartość pierwiastka kwadratowego liczby dwa wynosi:

$$1{,}41421\ 35623\ 73095\ 04880\ \ldots$$

Jak widać, rozwinięcie dziesiętne tej liczby jest nieskończone, to znaczy, że jej wartość to jeden i cztery dziesiąte i jedna setna i cztery tysięczne i jedna dziesięciotysięczna i tak dalej w nieskończoność (jak wyżej). Liczba ta musi powstawać zatem w nieskończonej ilości kroków, poprzez dodawanie coraz mniejszych wartości. Z drugiej strony pierwiastek kwadratowy liczby dwa posiada w geometrii konkretną egzemplifikację – jest to długość przekątnej kwadratu o boku długości 1 (co wynika wprost z twierdzenia Pitagorasa). Możemy narysować na kartce taki kwadrat, poprowadzić jego przekątną i otrzymamy odcinek długości dokładnie pierwiastka kwadratowego z liczby dwa. Sam proces rysowania owej przekątnej nie jest przecież procesem nieskończonym w czasie – nie odmierzamy na kartce coraz mniejszych odcinków. Z jednej więc strony pierwiastek kwadratowy z liczby dwa jest jedynką, do której należy w nieskończonej liczbie kroków dodawać coraz mniejsze wartości, z drugiej strony natomiast jest to konkretna skończona wielkość, którą wyraża długość przekątnej kwadratu o boku długości 1.

Innym przykładem liczby „nieintuicyjnej” jest liczba urojona i, czyli taka liczba, która podniesiona do kwadratu daje -1:

$$i^2 = -1$$

Co to za liczba? Jak ją sobie wyobrazić? Jest to trudne (o ile w ogóle możliwe). Kolejny problem pojawia się w przypadku liczb ujemnych: można sobie wyobrazić „trzy” jabłka, ale wyobrazić sobie „minus trzy” jabłka już gorzej. Te i podobne przykłady sprawiają, że pytanie o status ontyczny liczb staje się jeszcze ciekawsze.

W dyskusji nad istnieniem przedmiotów matematycznych ukształtowały się dwa główne opozycyjne stanowiska: realizm (zwany platonizmem) i antyrealizm. Oczywiście, żadne z nich nie jest jednolite – można wskazać różne ich odmiany. W tej pracy postaramy się jednak wydobyć raczej ogólną ideę wspomnianych stanowisk, niż dokonywać szczegółowej egzegezy.

3. INTUICJONIZM

Początków intuicjonizmu można doszukiwać się w poglądach filozofa z Królewca. Immanuel Kant, który nazwał siebie idealistą transcendentalnym, twierdził, że sądy matematyczne są zawsze sądami apriorycznymi. Ponieważ Kant był ontologicznym konceptualistą, konsekwentnie w filozofii matematyki stał na stanowisku konstruktywizmu, twierdząc, że warunkiem istnienia obiektów matematycznych jest możliwość skonstruowania ich w skończonym ciągu operacji intelektualnych. Zatem według Kanta to umysł wytwarza obiekty matematyczne – liczby istnieją tylko w umyśle[3].

Szeroko pojęty konstruktywizm stanął u podstaw intuicjonizmu, którego inicjatorem był żyjący na przełomie XIX i XX wieku holenderski matematyk Luitzen Egbertus Jan Brouwer. Inny czołowy przedstawiciel tego nurtu to Arend Heyting. Według intuicjonistów matematyka to wynik pewnej funkcjonalności intelektu, życiowej aktywności rozumu. Motywacją przebudowy matematyki w duchu intuicjonistycznym była potrzeba usunięcia z jej terenu groźby sprzeczności. Brouwer przeciwstawił się zarówno tezie logicystów, że

---

[3] Konstruktywizm jest nurtem obejmującym kilka kierunków, których wspólną cechą jest wymóg ograniczenia się do rozpatrywania wyłącznie przedmiotów konstruowalnych. Kierunki te jednak różnią się w kwestii rozumienia pojęcia konstruowalności i przyjmują różne metody konstrukcji. Do najbardziej znanych wersji konstruktywizmu należą m.in.: intuicjonizm, rozgałęziona teoria typów Russella i Whiteheada, czy konstruktywny formalizm Goodsteina.

matematykę należy sprowadzić w całości do logiki (teorii mnogości), jak również postulatowi formalistów, by matematykę traktować wyłącznie jako język złożony z określonych symboli. Intuicjoniści twierdzą, że zdania matematyki to tylko sprawozdania z operacji przeprowadzonych przez intelekt – język zatem służy wyłącznie do komunikowania myśli, utrwalania czyichś matematycznych idei[4]. Komunikacja matematyków między sobą za pomocą języka służy jedynie odtworzeniu tego samego procesu myślowego w różnych umysłach. Zatem matematyki nie da się sprowadzić po prostu do języka.

Jedną z konsekwencji przyjęcia stanowiska intuicjonistycznego jest odrzucenie aksjomatycznej metody budowania matematyki. Aksjomaty, jak wiemy, często po prostu postulują istnienie pewnych przedmiotów, tymczasem – zdaniem intuicjonistów – nie może istnieć coś tylko na zasadzie postulatu. O przedmiotach matematycznych możemy mówić dopiero wtedy, gdy zostaną skonstruowane. Zgodnie z tą ideą, należy więc odrzucić istnienie obiektów związanych z nieskończonością aktualną, czyli na przykład istnienie nieskończonego zbioru wszystkich liczb naturalnych. Umysł ludzki nie jest w stanie skonstruować takiego zbioru, ponieważ liczb naturalnych, jak wiemy, jest nieskończenie wiele, więc żeby je wszystkie skonstruować, potrzeba nieskończonego czasu. Żaden umysł ludzki nie ma tyle czasu, by skonstruować zbiór wszystkich liczb naturalnych. Zgodnie z intuicjonizmem nie ma też ani zbiorów nieprzeliczalnych, ani liczb kardynalnych pozaskończonych innych niż alef zero. Jak widać, cena obrony doktryny intuicjonistycznej jest bardzo wysoka[5]. Intuicjonizm nigdy nie zastąpił matematyki klasycznej. Mimo to nawet dziś jest on koncepcją interesującą i godną uwagi[6].

3. REALIZM

Realizm w filozofii matematyki, zwany platonizmem, jest stanowiskiem, zgodnie z którym abstrakcyjne przedmioty matematyczne istnieją niezależnie od jakiegokolwiek umysłu. Jest to więc pogląd skrajnie opozycyjny do intuicjonizmu. Platonizm, o którym mówimy, należy wyraźnie odróżnić od oryginalnej historycznej filozofii Platona. Oczywiście, platonizm wyrósł z platońskiej koncepcji abstrakcyjnych i odwiecznych form, my jednak terminu „platonizm” będziemy używać precyzyjnie na określenie filozoficznego stanowiska, będącego koniunkcją trzech następujących stwierdzeń[7]:

- istnieją przedmioty matematyczne,
- przedmioty matematyczne są abstrakcyjne (tzn. nie są czasowo-przestrzenne),
- przedmioty matematyczne są niezależne od ludzi, ich języka, myśli i aktywności intelektualnej (tzn. liczby, zbiory czy funkcje istniałyby nawet wtedy, gdyby nie istniał żaden myślący agent)[8].

---

4 A. Heyting, *Die intuitionistische Grundlegung der Mathematik*, „Erkenntnis” 2 (1931), s. 106.

5 R. Murawski, *Filozofia matematyki. Zarys dziejów*, Poznań 2008, s. 83.

6 Zob. R. Iemhoff, *Intuitionism in the Philosophy of Mathematics* [w]: *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* (Winter 2016 Edition), https://plato.stanford.edu/entries/intuitionism/#TwoActInt (dostęp: 20.07.2017 r.).

7 Zob. Ø. Linnebo, *Platonism in the Philosophy of Mathematics* [w:] *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* (Summer 2017 Edition), https://plato.stanford.edu/entries/platonism-mathematics/ (dostęp: 20.07.2017 r.).

8 Niektórzy od platonizmu odróżniają stanowisko pokrewne, zwane antynominalizmem. Jeżeli nominalizm rozumielibyśmy klasycznie jako pogląd, zgodnie z którym nie istnieją żadne abstrakcyjne

Jednym z najważniejszych etapów rozwoju platonizmu we współczesnej filozofii matematyki są dokonania Gottloba Fregego, który w swoim słynnym dziele *Die Grundlagen der Arithmetik* podjął się między innymi zadania zdefiniowania pojęcia liczby. Frege odróżnił dwa bliskoznaczne terminy: „Zahl” i „Anzahl”. Pierwszego z nich użył na oznaczenie liczb rozumianych jako pewne przedmioty idealne (na przykład: 3, 4 i 5 są liczbami w tym właśnie znaczeniu), drugi rozumiał jako liczebność – moc zbioru, liczbę kardynalną[9]. „Anzahl” jest według Fregego predykatem drugiego rzędu, orzekanym o pojęciach pierwszego rzędu. Poszczególne liczebniki traktował on natomiast jako nazwy własne liczb-przedmiotów, a nie jako predykaty[10]. Odróżnienie atrybutywnego i rzeczownikowego traktowania liczby Frege zobrazował potocznym przykładem, wskazując, że wyrażenie „błękitny” odróżniamy przecież wyraźnie od wyrażenia „kolor nieba”. W pierwszym przypadku mamy do czynienia z własnością, predykatem („x jest błękitny”), w drugim – z „rzeczownikowym” ujęciem błękitu. Zatem wypowiadając zdanie „Niebo jest błękitne”, wskazujemy na własność nieba, jaką jest błękit. Ale już w zdaniu „Błękit to kolor nieba” termin „błękit” nie pełni roli predykatywnej, a wskazuje na jakiś (abstrakcyjny) byt. Zdaniem Fregego z podobną sytuacją mamy do czynienia w przypadku liczby. Predykat „x ma dwie ręce” mówi o liczebności zbioru rąk pewnego obiektu x, na przykład „Adam ma dwie ręce”. Natomiast samo słowo „dwa”, traktowane rzeczownikowo (jak na przykład w zdaniu „Dwa jest liczbą parzystą”), jest nazwą własną pewnego bytu idealnego – liczby dwa. Zatem liczba 52 jest pewną własnością talii kart – jej liczebnością (*Anzahl*), z kolei liczba 460 jest liczebnością (*Anzahl*) posłów na Sejm Rzeczypospolitej Polskiej. Z drugiej strony same przedmioty zwane „52” czy „460” to obiekty idealne (*Zahl*), niezależne od jakiegokolwiek „nosiciela”[11].

Liczba więc nie jest bytem wyłącznie myślowym, subiektywnym, treścią intelektu, ale jest czymś realnie i niezależnie istniejącym. Frege uważa, że podobnie jak astronomia nie zajmuje się ideami planet, ale samymi planetami, tak matematyka nie zajmuje się ideami liczb, ale samymi liczbami. Liczby jednakże, mimo że są bytami obiektywnymi, nie są przedmiotami podlegającymi zmysłom[12]. Argumentacja Fregego na rzecz istnienia abstrakcyjnych i niezależnych bytów liczbowych (zwana argumentacją semantyczną) wynika z jego ogólnej koncepcji przedmiotów abstrakcyjnych[13]. Rozumowanie Fregego można by więc sformułować następująco[14]:

1. Niektóre sądy matematyczne są prawdziwe.
2. Mamy od razu daną głęboką strukturę sądów matematycznych.
3. A zatem istnieją przedmioty będące wartościami zmiennych związanych występujących w sądach uznawanych przez nas za prawdziwe.

przedmioty, to antynominalizm twierdziłby – przeciwnie – że istnieją pewne przedmioty abstrakcyjne. Antynominaliści jednak nie uważają, że abstrakcyjnie istniejące przedmioty są niezależne od myślącego agenta, stąd antynominalizm jest stanowiskiem nieco słabszym od platonizmu.

[9] Zob. G. Frege, *Die Grundlagen der Arithmetik,* Breslau 1884, § 18, s. 24–25.

[10] Zob. *ibidem*, § 106, s. 115–116.

[11] Więcej na temat ewolucji Fregowskiej koncepcji liczby – G. Besler, *Gottlob Frege o liczbie. Przyczynek do określenia roli, jaką dla filozofów pełni historia matematyki*, „Zagadnienia Filozoficzne w Nauce” 53 (2013), s. 133-164.

[12] Zob. G. Frege, *Die Grundlagen der Arithmetik…*, § 27, s. 36–37.

[13] Zob. M. Dummett, *Frege. Philosophy of Language*, New York, Evanston, San Francisco, London 1973, s. 471–511.

[14] B. Brożek, M. Hohol, *Umysł matematyczny…*, s. 169–172.

Owa „głęboka struktura” sądów jest nawiązaniem do koncepcji Russella[15]. Jako przykład rozważmy zdanie „Każda liczba parzysta jest podzielna bez reszty przez 2”. Powyższe zdanie, należące do teorii matematycznej, uznajemy za prawdziwe. Po przełożeniu go na język logiki pierwszego rzędu, otrzymamy koniunkcję: „Istnieje takie x, że x jest liczbą parzystą i (dla każdego x: jeżeli x jest liczbą parzystą, to x jest podzielne bez reszty przez 2)”:

$$\exists x: P(x) \wedge [\forall x: P(x) \rightarrow D(x)]$$

Pierwszy czynnik tej koniunkcji niesie zobowiązania ontologiczne – mówi o istnieniu przynajmniej jednej liczby parzystej. Drugi czynnik już takich zobowiązań nie wypowiada – przedstawia jedynie pewną własność. Uznaliśmy wcześniej tę koniunkcję za prawdziwą, a warunkiem prawdziwości koniunkcji jest prawdziwość wszystkich jej czynników, zatem wyrażenie: „Istnieje takie x, że x jest liczbą parzystą” musi być prawdziwe. Z tego wynika, że liczby parzyste istnieją (a przynajmniej istnieje jedna taka liczba).

4. REALIZM *CONTRA* ANTYREALIZM

Jak powiedzieliśmy, platonizm (realizm) i intuicjonizm (antyrealizm) są stanowiskami skrajnie opozycyjnymi. Każde z tych stanowisk znajduje poważnych zwolenników pośród filozofów matematyki. Ostre opowiedzenie się po którejś ze stron zawsze więc grozić będzie solidnie uzasadnioną krytyką ze strony przeciwnej. Celem tej pracy jest nie tyle przekonanie czytelnika do którejś z omawianych opcji, lecz prezentacja argumentów, jakie mogłyby przemawiać na korzyść każdej z nich.

Wydaje się, że spośród dwóch wymienionych koncepcji intuicjonizm jest bardziej ugruntowany antropologicznie. Mówiąc „bardziej ugruntowany” mamy na myśli to, że lepiej odpowiada on sposobowi, w jaki człowiek osiąga pojęcie liczby. Jak pokazaliśmy, abstrakcyjne pojęcie liczby kształtowało się w procesie ewolucji od naturalnego ludzkiego poczucia numerycznego, poprzez wzorce numeryczne oparte na równoliczności. Liczba więc w tym ujęciu to jedynie konstrukt intelektu, a matematyk nie jest człowiekiem, który wypływa niczym odkrywca na matematyczny ocean, by kolonizować nieodnalezione dotąd obszary, lecz po prostu te obszary w swoim intelekcie (i nigdzie indziej) dopiero stwarza. Na korzyść takiego stanowiska mogłoby przemawiać słynne zdanie, od którego rozpoczyna się ogrom współczesnych dowodów matematycznych: „Niech … będzie …”. Być może więc matematyk wypowiadający słowa „Niech x będzie liczbą naturalną” stwarza liczbę naturalną dokładnie tak jak samo, jak Bóg wypowiadający słowa „Niechaj się stanie światłość” stworzył dzień.

Intuicjonizm wyrósł z filozofii Kanta, a Kant – jak wiemy – dokonał „kopernikańskiego” przewrotu w krytyce poznania. Przekonywał on, że nasz rozum zawsze wyprzedza doświadczenie, stawiając pytania i jakby „zmuszając” przyrodę, by na nie odpowiadała[16]. Zatem być może nasz matematycznie wyposażony umysł odczytuje świat liczbami, ale świat sam w sobie żadnych liczb nie potrzebuje? Znaczyłoby to, że zjawiska przyrodnicze można opisywać językiem matematyki i człowiek rzeczywiście opisuje świat w ten sposób,

[15] Zob. B. Russell, *On Denoting*, „Mind” 14 (1905), s. 479–493.
[16] I. Kant, *Krytyka czystego rozumu*, t. 1, Warszawa 1957, s. 26–28.

lecz dzieje się tak nie dlatego, że człowiek odkrywa w świecie jakieś niezależne byty liczbowe, ale dlatego, że matematycznie wyposażony intelekt poznając nakłada na otaczającą go rzeczywistość liczbową siatkę.

Dużo ostrzej sprawę stawia Hartry Field. Twierdzi on, że nie tylko świat nie potrzebuje liczb (i jest ich rzeczywiście pozbawiony), ale również, że liczby nie należą nawet do naszego umysłu. Jest to wersja poglądu nominalistycznego, zgodnie z którym przedmioty abstrakcyjne nie istnieją. Field jest autorem słynnej książki mówiącej o świecie bez liczb[17]. Przedstawił tam odważną koncepcję, w ramach której dla mechaniki newtonowskiej sformułował aksjomatyczny system, nie odwołujący się w żaden sposób do pojęć liczbowych, a jedynie do pewnych geometrycznych relacji między punktami fizycznymi. Ponadto wysunął hipotezę, że matematykę można całkowicie oderwać od nauk przyrodniczych, traktując jej zdania jako fałszywe z punktu widzenia fizyki, choć być może prawdziwe w ramach pewnej teorii matematycznej. W związku z tym matematyka musi być tylko fikcją – choć fikcją użyteczną, ponieważ dzięki niej można łatwiej opisywać zjawiska przyrodnicze. Wójtowicz pisze: „Field deklaruje się jako nominalista. Według niego obiekty abstrakcyjne (w szczególności matematyczne) nie istnieją, teorie matematyczne zaś są pozbawione przedmiotowego odniesienia i stanowią jedynie użyteczne narzędzia – wygodne w użyciu fikcje. Zdania matematyczne nie wyrażają zatem prawd na temat rzeczywistości. Ich rola jest inna: matematyka jest jedynie narzędziem, bez którego konstrukcja teorii fizycznych byłaby trudniejsza i bardziej żmudna, ale jednak możliwa”[18]. Stąd właśnie stanowisko Fielda nazywa się fikcjonalizmem. Jego koncepcja spotkała się zarówno z głosami uznania, jak i z licznymi uzasadnionymi polemikami.

Nieco łagodniejsze stanowisko prezentuje Mark Balaguer, którego można zaliczyć do realistów nominalistycznych[19]. Uważa on, że należy odróżnić dwa rodzaje treści teorii matematycznych. Pierwszy rodzaj to treść nominalistyczna, czyli to, co dana teoria mówi o świecie. Na przykład mechanika kwantowa wyraża pewne fakty fizyczne, wykorzystując przy tym aparaturę matematyczną. Na tej zasadzie zdanie „Temperatura badanej cieczy wynosi trzydzieści pięć stopni Celsjusza” wyraża pewien fakt fizyczny – wykorzystuje się pewną liczbę rzeczywistą (obiekt matematyczny) do opisu temperatury (zjawiska fizycznego). Drugi rodzaj treści to treść platonistyczna, czyli to, co dana teoria mówi o sobie samej. Wypowiadając proste zdanie „Każda liczba parzysta jest podzielna bez reszty przez dwa”, nie mówimy o żadnym zjawisku fizycznym, lecz o pewnej cesze abstrakcyjnego obiektu, jakim jest liczba. Balaguer twierdzi, że w przypadku teorii naukowych prawdziwa może być tylko nominalistyczna treść tych teorii, natomiast treść platonistyczna jest zawsze fałszywa. Innymi słowy, prawdziwe może być to, co teorie mówią o świecie fizycznym, natomiast to, co mówią o świecie matematycznym, jest zawsze fałszywe[20]. W tym punkcie Balaguer różni się wyraźnie od Fielda, który twierdził – odwrotnie – że każda wypowiedź matematyczna jest fałszywa z punktu widzenia fizyki, choć prawdziwa w ramach teorii matematycznej.

Najbardziej radykalnym ruchem Fielda był cios w „argument z niezbędności”, sformułowany przez Quine’a, i będący jednym z najcięższych dział obronnych realizmu matematycznego. Trudno zaprzeczyć temu, że matematyka jest ważnym elementem wszelkich

[17] H. Field, *Science without Numbers. A Defense of Nominalism*, New Jersey 1980.
[18] K. Wójtowicz, *Spór o istnienie w matematyce*, Warszawa 2003, s. 48.
[19] Zob. M. Balaguer, *Platonism and Anti-Platonism in Mathematics*, New York, Oxford 1998.
[20] Zob. *ibidem*, s. 131.

teorii z zakresu fizyki. Quine głosił tezę o jedności całej wiedzy: zarówno potocznej, jak i naukowej, matematycznej czy filozoficznej. Wiedza według Quine'a tworzy sieć przekonań, to znaczy wszystkie przekonania są ze sobą powiązane. Każde nasze przekonanie jest jakoś zależne od każdego innego – również wiedza filozoficzna nie jest niezależna od nauk szczegółowych. Na sieci przekonań „zawieszony" jest nasz całościowy obraz świata. Nie można zatem bezkarnie usunąć matematyki z teorii naukowych, w szczególności z teorii fizycznych. Matematyka jest niezbędna w nauce – oto główny postulat argumentu Quine'a na rzecz realizmu.

Według Quine'a punktem wyjścia teorii fizycznych są zawsze jakieś dane empiryczne. Dane te są obserwowalne, ponieważ należą do makroświata – takiego świata, który możemy (samodzielnie lub za pomocą stosownych przyrządów) zaobserwować. Na podstawie danych empirycznych naukowcy tworzą pewne teorie, których elementami mogą być już nie tylko przedmioty obserwowalne, ale również przedmioty teoretyczne, czyli takie, których zaobserwować się nie da (na przykład elektrony lub pola grawitacyjne).

Postulowanie istnienia przedmiotów teoretycznych, choć nie ma żadnych empirycznych świadectw ich istnienia, wynika najczęściej z samej teorii – tego typu przedmioty zwykle upraszczają teorię. Quine uważa, że postulatywny charakter przedmiotów teoretycznych nie podważa ich realności. Co więcej, twierdzi on nawet, że wszystkie przedmioty teorii naukowej są w pewnym sensie przedmiotami teoretycznymi – także te przedmioty, którym w rzeczywistości pozajęzykowej odpowiadają rzeczy obserwowalne (ciała): „Postulowanie molekuł różni się od postulowania zwykłych ciał tylko stopniem komplikacji"[21]. Musi to oznaczać, że przedmiot matematyczny (będący w tym sensie przedmiotem teoretycznym), istnieje tak samo, jak każdy inny przedmiot teorii naukowej. Taki pogląd wynika zapewne z Quine'a koncepcji istnienia, zgodnie z którą nie ma różnych sposobów istnienia – dany obiekt po prostu istnieje albo nie istnieje. Przedmioty mogą się różnić własnościami, ale nie różnią się nigdy sposobem istnienia.

Dużą rolę w koncepcji Quine'a odgrywa kwantyfikacja. Wskazuje ona, gdzie w danej teorii pojawia się obiekt postulowany. Wskaźnikiem ontologii jest kwantyfikator egzystencjalny. Skoro w zasięgu kwantyfikacji znajdują się przedmioty matematyczne, to należy uznać ich istnienie, natomiast zdania odnoszące się do tych obiektów należy uznać za prawdziwe[22]. Quine opowiada się za referencjalną interpretacją kwantyfikatora egzystencjalnego. Zgodnie z tą interpretacją, wyrażenie „$\exists x\colon \varphi(x)$" jest prawdziwe wtedy i tylko wtedy, gdy w dziedzinie przedmiotowej, w której interpretowany jest dany język, znajduje się obiekt o własności φ. Kryterium istnienia przedmiotu jest zatem fakt, że o tym przedmiocie mówi jakieś wyrażenie egzystencjalne, a „fakt, że obiekty matematyczne mają inne własności niż znane nam z codziennego doświadczenia makroskopowe obiekty fizyczne, nie stanowi żadnego powodu, aby odmawiać im istnienia"[23].

Podsumowując, Quine uzasadnia istnienie przedmiotów matematycznych w taki sam sposób, w jaki uzasadnia istnienie dowolnego typu obiektów postulowanych w ramach teorii empirycznych.

---

[21] W.V.O. Quine, *Granice wiedzy i inne eseje filozoficzne*, Warszawa 1986, s. 75–76.

[22] W.V.O. Quine, *O tym, co istnieje* [w:] idem, *Z punktu widzenia logiki. Dziewięć esejów logiczno-filozoficznych*, Warszawa 2000, s. 29–47.

[23] K. Wójtowicz, *Spór o istnienie w matematyce*…, s. 31–32.

5. ZWIĄZEK MATEMATYKI ZE ŚWIATEM

Czy matematyka odwzorowuje świat, który jest nam dostępny, czy może to świat odwzorowuje jakąś (genetycznie pierwszą) matematykę? To pytanie przypomina żartobliwy problem: co było pierwsze – kura czy jajo? Czy świat został stworzony według jakiegoś (zapewne skomplikowanego) wzoru matematycznego, którego skrawki przez całe wieki żmudnie odkrywamy, czy raczej matematyka jest specyficznie ludzkim sposobem odczytywania świata i gdyby nie człowiek, to żadnej matematyki by nie było? Czy świat jest właśnie taki, jaki jest, ponieważ kształtują go prawa matematyki, czy – odwrotnie – matematyka jest właśnie taka, a nie inna, ponieważ „wyczytujemy" ją ze świata?

Znany fizyk, noblista Eugene Wigner w swoim artykule na temat relacji między fizyką a matematyką wygłasza tezę, że pojęcia matematyczne znajdują zastosowanie dużo dalej niż tylko w kontekście matematycznym: „Cud stosowności języka matematyki w formułowaniu praw fizyki jest wspaniałym darem, którego nie rozumiemy, ani na który nie zasłużyliśmy"[24]. Na potwierdzenie tej tezy podaje przykład zaczerpnięty z fizyki. W roku 1925 trzech fizyków – Werner Heisenberg, Max Born oraz Pasqual Jordan – stworzyło tzw. mechanikę macierzową, będącą pierwszym pełnym i spójnym opisem mechaniki kwantowej. Born zauważył, że pewne reguły obliczeniowe, dostarczone mu przez Heisenberga, są formalnie identyczne z regułami matrycowymi, ustalonymi już dużo wcześniej przez matematyków. Można zatem wyciągnąć wniosek: matematycy wyprzedzają fizyków i „kierowani poczuciem matematycznego piękna tworzą formalne struktury, które później są przydatne fizykom, pomimo iż nie były tworzone z taką intencją"[25]. Tego typu przykładów można podać więcej. Poza tym niektóre obiekty matematyczne sprawiają wrażenie, jakby „żyły własnym życiem": zbiory Mandelbrota (fraktale), metryka Lorentza. O tej ostatniej opowiada Heller: „Gdy wniknie się w geometryczną treść tego obiektu i jego własności modelowania świata, niezwykłość Bożego prezentu staje się dramatycznie widoczna"[26]. Heller nie ukrywa tego, że ma silne poczucie „otrzymania" struktury Lorentza. O zbiorze Mandelbrota pisze z kolei Roger Penrose: „Z całą pewnością zbiór Mandelbrota nie został wymyślony przez człowieka. Zbiór ten należy w sposób obiektywny do samej matematyki. Jeśli w ogóle ma sens mówienie o istnieniu zbioru Mandelbrota, to nie jest on jakąś formą istnienia w naszych umysłach, ponieważ nikt nie jest w stanie zdać sobie sprawy z jego nieskończonej różnorodności i nieograniczonej komplikacji"[27]. Te i inne przykłady przemawiałyby za słusznością platonizmu – uczony nie tworzy, lecz odkrywa już istniejące przedmioty matematycznego świata. Innymi słowy, matematyk pisze wzory, lecz najczęściej nie zastanawia się, do czego one będą kiedyś przydatne. Zdarza się, że po pewnym (nieraz długim) czasie wzory te znajdują zastosowanie w opisie zjawisk fizycznych. Platonizm jest bardzo atrakcyjnym punktem widzenia pośród współczesnych fizyków: „Matematyk czysty nie może być pewnym dnia ani godziny, kiedy stworzona przez niego – z motywacji czysto estetycznych – teoria stanie się narzędziem w rękach fizyka"[28]. Zwolennikami platonizmu były najtęższe umysły, jak choćby Albert Einstein, który twierdził: „Nasze dotychczasowe

[24] E. Wigner, *The Unreasonable Effectiveness of Mathematics in the Natural Sciences*, „Communications in Pure and Applied Mathematics" 13 (1960), s. 14.

[25] S. Weinberg, *Dreams of a final theory*, London 1993, s. 125.

[26] M. Heller, *Jak istnieje metryka Lorentza?* [w:] *Spór o uniwersalia a nauka współczesna*, red. M. Heller, W. Skoczny, J. Życiński, Kraków 1991, s. 28.

[27] R. Penrose, *Droga do rzeczywistości*, Warszawa 2007, s. 15.

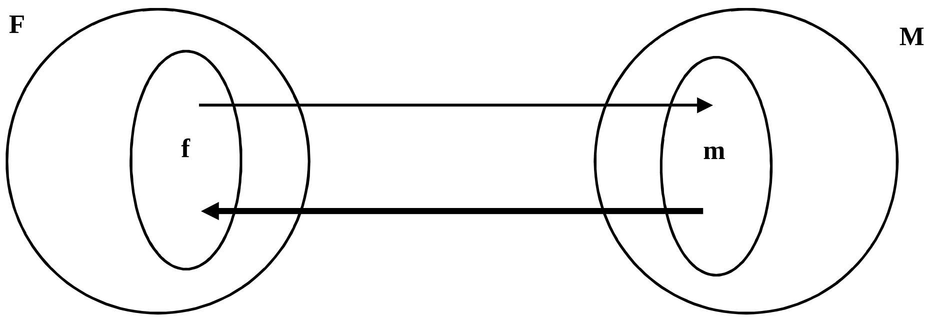
[28] K. Wójtowicz, *Spór o istnienie w matematyce*…, s. 291.

doświadczenie potwierdza przekonanie, że natura jest realizacją najprostszych idei matematycznych. Jestem przekonany, że możemy odkryć przy pomocy czysto matematycznych konstrukcji pojęcia i prawa, które stanowią klucz do rozumienia zjawisk przyrody”[29].

Jednak czy platonizm to jedyne stanowisko, które jest w stanie dobrze wyjaśnić przystawanie matematyki do świata zjawisk przyrody? Próbując to rozstrzygnąć, postawmy trzy pytania:

1. Czy istnieje matematyka?
2. Czy byty matematyczne stanowią przyczynę zjawisk przyrodniczych?
3. Jak istnieją byty matematyczne?

Odpowiedź na pierwsze pytanie wydaje się oczywista: tak, matematyka istnieje, ponieważ jest fenomenem, który wyraźnie nam się jawi, mimo że nasze stanowiska w sporze o istnienie przedmiotów matematycznych mogą być skrajnie różne – możemy różnić się co do tego, „jak” istnieje matematyka, ale to, „że” matematyka istnieje, raczej nie podlega dyskusji.



Rys. 1.

Przechodząc do odpowiedzi na drugie pytanie, przywołajmy prosty schemat, przypominający rysunek współczesnego fizyka Chena Ninga Yanga (rys. 1). Pole F oznacza na nim świat przedmiotów fizycznych, natomiast pole M oznacza świat przedmiotów matematycznych.

Nic nie stoi na przeszkodzie, by światy M i F były nieskończone. Jaka jest zależność pomiędzy tymi światami? Otóż można rozpoznać empirycznie pewien fragment f świata F, a następnie stwierdzone w nim prawidłowości ująć w matematyczną formę – tak zwykle czynią fizycy. Proces ten obrazuje cienka strzałka na rys. 1. Ale można też wyodrębnić pewien fragment m świata M i stwierdzić jego „podobieństwo” do fragmentu f świata F. Jest to podobieństwo tak narzucające się, że nieraz trudno uznać je za zwykły przypadek: na przykład trudno uznać, by proporcje w układzie łopatek szyszki, czy ziaren w kwiecie słonecznika, odpowiadające dokładnie ciągowi Fibonacciego, były czystym przypadkiem[30]. To wiedzie nas ku przekonaniu, że fragment f jest jakąś realizacją fragmentu m, tak jak fizyczna budowla, rozpoznawalna empirycznie, realizuje abstrakcyjne

[29] A. Einstein, *On the Method of Theoretical Physics*, „Philosophy of Science” 1 (1934), s. 167.

[30] I. Stewart, *Liczby natury. Nierealna rzeczywistość matematycznej wyobraźni*, Kraków 2017, s. 161–169.

wyliczenia projektu architekta. Ten kierunek symbolizuje gruba strzałka na rys. 1. Mimo że nazywamy go platonizmem, różni się on od oryginalnych poglądów Platona tym, że dla starożytnego filozofa świat F był tylko kiepską „kopią”, nieudolnym naśladownictwem świata M, natomiast dla współczesnych platonistów poszczególne fragmenty świata F mogą być dokładną, precyzyjną realizacją odpowiadających im fragmentów świata M. W tej precyzji tkwi właśnie siła argumentu na rzecz platonizmu – jak pisał Wigner, „niedorzeczną skuteczność matematyki” w opisywaniu przyrody trudno nazwać przypadkiem. Potwierdza to Penrose, stwierdzając: „[W] wielu przypadkach owo pragnienie matematycznej spójności i elegancji prowadzi nas do odkrycia pojęć i struktur matematycznych, które, jak się okazuje, ujmują zagadnienia świata fizyki w sposób głębszy i bardziej rozległy, niż tego początkowo oczekiwaliśmy. Czasem sprawia to wrażenie, jakby sama Natura kierowała się wymogami elegancji i spójności, podobnymi do tych, które sterują matematycznym rozumowaniem”[31].

Czy jednak rzeczywiście gruba strzałka z rys. 1 musi mieć cokolwiek wspólnego z przyczynowością? Czy świat matematyczny musi być koniecznie wzorcem dla świata fizycznego? Oczywiście, taki scenariusz jest możliwy, a nawet atrakcyjny, na przykład w wyjaśnianiu porządku we wszechświecie, stworzonym i rządzonym przez rozumną istotę wyższą (boga). Jednak wydaje się równie uprawniony pogląd, że gruba strzałka na rys. 1 wyraża tylko podobieństwo, zbieżność, ale nie przyczynowość. To z kolei pozwala nam mówić o występowaniu przypadku: fragmenty świata F przystają jakoś do fragmentów świata M, ale świat M w żaden sposób nie warunkuje świata F. To, że blaszki w szyszce układają się tak, jakby realizowały tajemniczy projekt zapisany w ciągu Fibonacciego, wcale nie oznacza, że muszą one jakikolwiek projekt realizować. To może być zwykły przypadek, jak analogia między rysami twarzy sobowtórów, która wcale nie musi (choć niekiedy może) świadczyć o jakimkolwiek związku przyczynowym między nimi. Jest to, co prawda, zadziwiające, spektakularne, ale może być zwyczajnie przypadkowe.

Jeśli stanęlibyśmy na stanowisku, że świat bytów matematycznych nie przyczynuje świata bytów fizycznych, to moglibyśmy zadać pytanie, co z cienką strzałką z rys. 1. Czy obserwacja świata fizycznego kształtuje naszą matematykę? Czy matematyka byłaby inna, gdyby inny był świat?

Tak się składa, że prawa matematyczne powstają najczęściej w oderwaniu od – nazwijmy to – „bazy empirycznej”. Matematycy formułują swoje teorie bez większej refleksji nad tym, do czego będzie je można później zastosować (o ile w ogóle będzie je można do czegokolwiek stosować). Istnieje wiele matematycznych pojęć, które nie posiadają odpowiedników w świecie fizycznym (np. idea nieskończoności). Czyżby przyroda nie realizowała „całej” matematyki, ale tylko jej fragment? Czy istnieje jakiś „autonomiczny”, „niewykorzystany” fragment matematyki, czyli taki fragment, który nic nie mówi o świecie empirycznym? Elżbieta Kałuszyńska twierdzi: „Zamiast poszukiwać sposobu, w jaki Natura «nagina się» do naszych konceptów, czy odzwierciedla idealne matematyczne byty, warto rozważyć sytuację odwrotną, w której to nasze umysły kształtowane są przez «Naturę» w ten sposób, że zdolne są w rozmaitości zjawisk dostrzec strukturę zorganizowanej materii będącej podłożem tych zjawisk, strukturę tworzywa Wszechświata. Rozwijanie matematyki nie polegałoby na tworzeniu dowolnych konstrukcji czy penetracji platońskiego świata idei, ale na poszukiwaniu arystotelesowej *formy* w rzeczach, wzorców, realizowa-

[31] R. Penrose, *Droga do rzeczywistości*, Warszawa 2007, s. 59.

nych w rzeczywistości na tysięczne sposoby”[32]. Kałuszyńska nazywa to stanowisko arystotelizmem.

W tym miejscu warto przywołać subtelne rozróżnienie: matematyzowalność świata – matematyczność świata. Przez „matematyzowalność” będziemy rozumieli możliwość zmatematyzowania, czyli opisu za pomocą matematycznych teorii. „Matematycznością” świata empirycznego nazwiemy natomiast jego ontyczną cechę, polegającą na realizowaniu przez świat pewnego abstrakcyjnego matematycznego wzorca. W myśl tego rozróżnienia może warto byłoby rozważyć tezę, zgodnie z którą świat jest matematyzowalny, ale nie matematyczny? To znaczy: pewne fragmenty świata empirycznego da się opisać, używając technik matematycznych, ale matematyka nie jest „kodem genetycznym” świata. Taki pogląd wydaje się równie silny jak platonizm.

Spróbujmy więc odpowiedzieć na trzecie pytanie: jak istnieją byty matematyczne? Jaki jest „jakościowo” świat *M* przedmiotów matematycznych? Czy to świat bytów idealnych, czy konstruktów myślowych? A może to tylko świat pozorny, fikcyjny (w stylu Fielda czy Balaguera)? Głównym punktem naszej nieufności wobec platoników jest przyjmowane przez nich założenie o oddziaływaniu przyczynowym świata idealnego na świat materialny. Oczywistość tego założenia właśnie poddaliśmy zwątpieniu. Nie chodzi jednak o całkowite odcięcie się od platonizmu – być może platonizm jest stanowiskiem prawdziwym, ale stanowi raczej przedmiot wiary niż wiedzy. Ponadto niektóre „kłopotliwe” idee matematyczne można by obronić chyba także poza platonizmem, przyjmując – powiedzmy – „fenomenologizujący” sposób myślenia. Nic nie stoi na przeszkodzie, by liczby (czy inne obiekty matematyczne) były tworem umysłu. Cena przyjęcia konstruktywizmu wcale nie musi być aż tak wysoka, jak się to zwykle przedstawia. Przeciwnik konstruktywizmu w tym miejscu zawołałby, że przecież konstruktywizm wyklucza możliwość konstruowania zbiorów aktualnie nieskończonych, które są ważną częścią współczesnej matematyki, na przykład zbioru wszystkich liczb naturalnych. Czy rzeczywiście się nie da? Czy rzeczywiście potrzeba nieskończonego czasu, by skonstruować zbiór nieskończony? Chyba nie. Przecież wyobrażenie sobie (skonstruowanie) zbioru pierwszego miliona liczb naturalnych nie zajmuje umysłowi więcej czasu, niż wyobrażenie sobie zbioru z jednym tylko elementem. Z filozoficznego punktu widzenia przedmioty matematyczne moglibyśmy traktować jak pewne obiekty fenomenalne – coś na wzór Ingardenowskich postaci literackich. Tak jak Andrzej Kmicic jest postacią daną nam w całości, ale posiadającą tzw. miejsca niedopowiedzenia, gdyż nie posiadamy absolutnie wszystkich szczegółów jego sylwetki, tak zbiór wszystkich liczb naturalnych może być aktualnie dany naszemu umysłowi „w całości”, lecz z pewnymi „miejscami niedopowiedzenia” – nazwijmy je „obszarami rozmycia”[33]. Chodzi o to, że umysł aktualizuje, „uwyraźnia” tylko te „obszary” zbioru liczb naturalnych, na które akurat skierowana jest nasza uwaga. Reszta się „rozmywa”. Jest to jakby zbiór z „zatartymi granicami”. Obszary rozmyte należą do zbioru – umysł ma ich świadomość, ma do nich „dostęp” i nie potrzebuje nieskończonego czasu, by je zaktualizować. Nie jest to nieskończoność potencjalna. Być może jest to sposób na obejście założeń platonizmu.

Czy gdyby z ziemi zniknęli nagle wszyscy ludzie, zniknęłaby również matematyka? Platonik powiedziałby, że matematyka by nie zniknęła, bo świat jest matematyczny. Odpowiedź płynąca z tej pracy wydaje się jednak inna – matematyka mogłaby zniknąć, bo

[32] E. Kałuszyńska, *Język a rzeczywistość. Performatywna funkcja języka* [w:] *Filozofia przyrody współcześnie*, red. M. Kuszyk-Bytniewska, A. Łukasik, Kraków 2010, s. 158.

[33] Używamy tu słowa „obszar” bez żadnych konotacji czasoprzestrzennych.

matematykę pojmujemy jako czynność umysłu. Jednak wraz z hipotetycznym zniknięciem matematyki nie zginąłby świat, bo jego ontyczne podstawy nie muszą być wcale matematyczne, lecz tylko matematyzowalne.

LITERATURA

1. Balaguer M., *Platonism and Anti-Platonism in Mathematics*, Oxford University Press, New York-Oxford 1998.
2. Besler G., *Gottlob Frege o liczbie. Przyczynek do określenia roli, jaką dla filozofów pełni historia matematyki*, „Zagadnienia Filozoficzne w Nauce” 53 (2013).
3. Brouwer L.E.J., *Intuitionisme en formalisme*, Noordhoff, Groningen 1912.
4. Brouwer L.E.J., *Intuitionism and Formalism*, „Bulletin of the American Mathematical Society” 20 (1913).
5. Brożek B., Hohol M., *Umysł matematyczny*, Copernicus Center, Kraków 2017.
6. Dummett M., *Frege. Philosophy of Language*, Harper & Row, New York, Evanston, San Francisco, London 1973.
7. Einstein A., *On the Method of Theoretical Physics*, „Philosophy of Science” 1 (1934).
8. Engel P., *Platonizm matematyczny i antyrealizm*, „Filozofia Nauki” 2 (1997).
9. Field H., *Science without Numbers. A Defense of Nominalism*, Princetown University Press, New Jersey 1980.
10. Frege G., *Die Grundlagen der Arithmetik*, Verlag von Wilhelm Koebner, Breslau 1884.
11. Heller M., *Czy świat jest matematyczny?* „Zagadnienia Filozoficzne w Nauce” 22 (1998).
12. Heller M., *Jak istnieje metryka Lorentza?* [w:] *Spór o uniwersalia a nauka współczesna*, red. M. Heller, W. Skoczny, J. Życiński, OBI, Kraków 1991.
13. Heyting A., *Die intuitionistische Grundlegung der Mathematik*, „Erkenntnis” 2 (1931).
14. Ifrah G., *Dzieje liczby czyli historia wielkiego wynalazku*, Ossolineum, Wrocław–Warszawa–Kraków–Gdańsk, Łódź 1990.
15. Kałuszyńska E., *Język a rzeczywistość. Performatywna funkcja języka* [w:] *Filozofia przyrody współcześnie*, red. M. Kuszyk-Bytniewska, A. Łukasik, Universitas, Kraków 2010.
16. Kant I., *Krytyka czystego rozumu*, t. 1, PWN, Warszawa 1957.
17. Kant I., *Prolegomena do wszelkiej przyszłej metafizyki, która będzie mogła wystąpić jako nauka*, PWN, Warszawa 1993.
18. Murawski R., *Filozofia matematyki. Zarys dziejów*, UAM, Poznań 2008.
19. Penrose R., *Droga do rzeczywistości*, Prószyński i Spółka, Warszawa 2007.
20. Quine W.V.O., *Granice wiedzy i inne eseje filozoficzne*, PIW, Warszawa 1986.
21. Quine W.V.O., *O tym, co istnieje* [w:] W.V.O. Quine, *Z punktu widzenia logiki. Dziewięć esejów logiczno-filozoficznych*, Aletheia, Warszawa 2000.
22. Russell B., *On Denoting*, „Mind” 14 (1905).
23. Stewart I., *Liczby natury. Nierealna rzeczywistość matematycznej wyobraźni*, Copernicus Center Press, Kraków 2017.
24. Weinberg S., *Dreams of a final theory*, Vintage, London 1993.
25. Wigner E., *The Unreasonable Effectiveness of Mathematics in the Natural Sciences*, „Communications in Pure and Applied Mathematics” 13 (1960).
26. Wójtowicz K., *Spór o istnienie w matematyce*. Semper, Warszawa 2003.

NETOGRAFIA

1. Iemhoff R., *Intuitionism in the Philosophy of Mathematics* [w:] The Stanford Encyclopedia of Philosophy (Winter 2016 Edition), https://plato.stanford.edu/entries/intuitionism/#TwoActInt (20.07.2017).
2. Linnebo Ø., *Platonism in the Philosophy of Mathematics* [w:] The Stanford Encyclopedia of Philosophy (Summer 2017 Edition), https://plato.stanford.edu/entries/platonism-mathematics/ (20.07.2017).

DO NUMBERS EXIST? RECONSTRUCTION OF THE DISPUTE OVER THE EXISTENCE OF MATHEMATICAL OBJECTS

The article presents a philosophical survey on the problem of existence of mathematical objects. In the first part a genesis of the notions "number" and "plurality" is presented. A basis of these notions is an equivalence relation which is well known from the set theory. Then an outline of intuitionism and realism in philosophy of mathematics is presented. Intuitionists claim that a world of mathematical objects comes only from human's intellect. It is usually said that the price of defending of intuitionism is very high (intuitionism rejects for example an actual infinity). Realism (also known as platonism) claims that all abstract mathematical objects are independent of the intellect. The main part of this work deals with the comparison of the realistic view with the antirealistic one (intuitionistic), together with the presentation of the arguments for both views. There are presented: Hartry Field and his nominalism (fictionalism), Mark Balaguer and his nominalistic realism, and famous Quine's „indispensability argument". The last part of the article is an attempt at answering the question concerning the causal relationship between mathematical objects and the world of physical phenomena. Finally, the article gives a new way to think about mathematical objects as "phenomenal" products of mind.

Keywords: nominalism, intuitionism, constructivism, platonism, number, realism, factionalism.

DOI: 10.7862/rz.2018.hss.41

Przesłano do redakcji: styczeń 2018 r.
Przyjęto do druku: wrzesień 2018 r.