

# MONOTOLITYCZNA METODA HARMONOGRAMOWANIA MONTAŻU WIELOWARIANTOWYCH PRODUKTÓW W HYBRYDOWYCH SYSTEMACH PRZEPIYWOWYCH

## *A monolithic method of scheduling for assembly of multi-option products in hybrid flow shop systems*

Marek MAGIERA

---

**S t r e s z c z e n i e:** Zaprezentowana metoda służy do budowy najkrótszych harmonogramów montażu produktów wielowariantowych. Uwzględniono specyficzne cechy montowanych produktów, wyróżniające te produkty (różne ich warianty), np. dodatkowe elementy (uchwyt), odmienność parametrów (silniki o różnych mocach), czy inne właściwości określające wygląd produktu (kolor obudowy). Wyznaczane harmonogramy dotyczą hybrydowych systemów przepływowych, które stanowią linie montażowe z równoległymi stanowiskami montażowymi. Pomiedzy poszczególnymi stadiami umieszczone są bufory międzyoperacyjne o ograniczonych pojemnościach, w których na wykonanie kolejnych operacji mogą oczekiwać montowane produkty. Przepływ wielowariantowych produktów odbywa się jednokierunkowo z uwzględnieniem sztywnych lub alternatywnych marszrut montażu. Zastosowano monolityczne, czyli jednopoziomowe podejście do budowy harmonogramu montażu. Równocześnie rozwiązane jest zadanie rozdziału operacji montażowych pomiędzy maszyny i rozdział tych operacji w czasie celem zbudowania jak najkrótszego harmonogramu montażu. Zbudowano liniowe modele matematyczne zadań programowania całkowitoliczbowego, przeznaczone do rozwiązywania tych zadań – w przypadku sztywnych lub alternatywnych marszrut montażu. Zastosowanie podejścia monolitycznego oraz programowania całkowitoliczbowego gwarantuje wyznaczenie optymalnego harmonogramu. Zbudowana struktura danych i zmiennych oraz relacje matematyczne uwzględniają produkty wielowariantowe. Wyróżniono operacje podstawowe (jednakowe dla danego typu produktów) oraz dodatkowe (różnicujące produkty określonego typu). Struktura danych i zmiennych oraz ograniczeń dotyczących zbudowanych modeli matematycznych korzystnie wpływają na złożoność obliczeniową.

Zaprezentowano wyniki eksperymentów obliczeniowych, których dokonano nie tylko w celu weryfikacji metody, ale również umożliwiły porównanie długości harmonogramów w przypadku sztywnych oraz alternatywnych marszrut.

**S ł o w a   k l u c z o w e:** systemy montażowe, harmonogramowanie montażu, planowanie operacyjne, programowanie całkowitoliczbowe

**A b s t r a c t:** The presented method is used to construction of the shortest assembly schedules of multi-option products. The specific characteristics of assembled products are regarded, for example additional elements (e.g. a handle), different parameters (e.g. a power of the engine), and other properties that determine appearance of a product (e.g. a color of a casing). Schedules are constructed for hybrid flow shop systems. This systems consist of assembly lines with parallel assembly machines. The intermediate buffers with limited capacity are located between assembly stages. In these buffers products are waiting to perform the next assembly operations. The unidirectional flow of multi-option products is regarded – for a fixed or an alternative assembly routes. The monolithic (an one level) approach to construction of assembly schedule is used. The task of assignment of assembly operations to machines and task of scheduling are simultaneously solved. The shortest schedule is fixed. The mathematical models of integer programming are constructed. A fixed assembly routes and an alternative assembly routes are regarded in the mathematical models. The monolithic approach and the integer programming ensure the construction of an optimal schedule.

The constructed structure of input parameters and variables and formulated mathematical relationships (constraints) regard multi-option products. There are basic operations (the same for the type of product) and additional operations (differentiating products of a specified type). The structure of input parameters and constraints, and structure of constraints formulated for mathematical models favourably affect the complexity of computing.

The results of computational experiments with the proposed method are presented. These experiments have been carried out not only in order to verify the method, but also to make it possible to compare the length of schedules for the fixed and the alternative routes.

**K e y w o r d s:** assembly systems, assembly scheduling, operating planning, integer programming

---

### **Wprowadzenie – produkty wielowariantowe a harmonogramowanie montażu**

Konkurencyjność ofert sprzedaży różnych typów produktów wymaga uwzględnienia indywidualnych wymagań klientów. Skutkuje to zróżnicowaniem produktów, ponieważ nadawane są im wyróżniające je cechy.

Dotyczy to m.in. liczby części składowych montowanych produktów (np. dodatkowe uchwyty), parametrów części składowych (np. silniki o różnych mocach), a także zewnętrznego wyglądu (np. obudowy o różnych kształtach i kolorach). Wyroby określonego typu, które są montowane w różnych wariantach, nazywane są produktami wielowariantowymi.

Celem zaprezentowanej w artykule metody jest wyznaczenie harmonogramów montażu scharakteryzowanych powyżej produktów. Budowa harmonogramów montażu wielowariantowych produktów wymaga uwzględnienia specyfiki tych produktów w strukturze danych i zmiennych, która jest wykorzystywana w matematycznym opisie problemu. W takim przypadku uwzględnia się mniej danych i zmiennych niż w alternatywnej koncepcji, w której każdy z wariantów produktu określonego typu opisywany jest oddzielnie (jako odrębny typ produktu). Wzięcie pod uwagę relatywnie mniejszej liczby parametrów i zmiennych, czego dokonano w zbudowanej strukturze danych i zmiennych dotyczących produktów wielowariantowych, korzystnie wpływa na złożoność obliczeniową rozwiązywanego problemu.

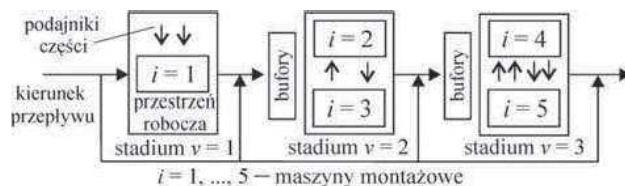
Wyróżnia się metody hierarchiczne oraz monolityczne, dotyczące budowy harmonogramów montażu. W przypadku metod hierarchicznych rozwiązywany problem dzielony jest na zadania cząstkowe, np. najpierw dokonywany jest przydział operacji do maszyn, a następnie operacje rozdzielane są w czasie. Przykład zastosowania takiego podejścia dotyczącego wielowariantowych produktów zawarto w pracy [3]. Zaproponowana w artykule metoda oparta jest na podejściu monolitycznym. Równocześnie dokonywany jest rozdział operacji w czasie i przestrzeni (między maszyny), a także dokonywany jest rozdział podajników części składowych. Wady i zalety obu koncepcji opisano w pracy [8], a także [5]. Problematyka dotycząca harmonogramowania montażu jest szeroko opisana m.in. w pracy [7].

Opis zadania harmonogramowania montażu i koncepcji jego rozwiązania zamieszczono w rozdziale 2, zaś matematyczny opis problemu przedstawiono w rozdziale 3. Informacje dotyczące przeprowadzonych eksperymentów obliczeniowych zawarto w rozdziale 4.

### Opis zadania i koncepcji jego rozwiązania

Dana jest jednokierunkowa linia montażowa z maszynami równoległymi. Każde stadium to zbiór maszyn równoległych. Produkt przepływający przez dane stadium obciąża w nim co najwyżej jedną maszynę. Kolejność przepływów produktów przez poszczególne stadia nie musi być zgodna z kolejnością wprowadzania produktów do systemu montażowego – niektóre stadia mogą być pominięte. Uwzględniony jest więc hybrydowy system przepływowy (hybrid flow shop), zwany również elastycznym systemem przepływowym. Ten rodzaj systemów przepływowych szczegółowo opisano m.in. w pracy [6]. Pomiedzy poszczególnymi stadiami znajdują się bufory międzyoperacyjne o ograniczonych pojemnościach. W przypadku braku możliwości wykonywania operacji dotyczącej danego produktu na maszynie (jest ona obciążona przez inny produkt), produkt ten oczekuje w buforze poprzedzającym stadium, w którym ma być wykonana operacja montażowa. W poszczególnych stadiach umieszczone są ponadto podajniki części. Znaczna część operacji montażowych polega na domontowaniu

części składowej do uprzednio zmontowanych części. Części te pobierane są z podajników, umieszczonych w ograniczonej przestrzeni roboczej określonych stadiów. Przykładowa konfiguracja hybrydowego systemu przepływowego, wykorzystywanego do montażu wielowariantowych produktów, zamieszczono na rys. 1.



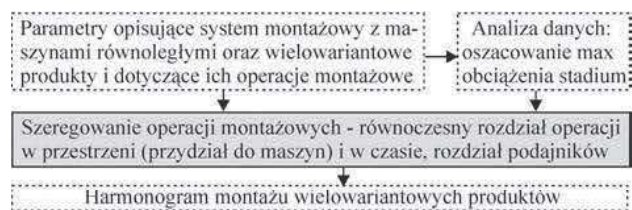
Rys.1. Przykładowa struktura hybrydowego systemu przepływowego z buforami międzyoperacyjnymi

Fig. 1. Example of structure of hybrid flow shop with intermediate buffers

W opisanym systemie przepływowym mogą być równocześnie montowane różne typy wielowariantowych produktów. Uwzględniono dwa rodzaje marszrut montażu:

- sztywne marszrut montażu, w przypadku których każdy typ operacji przydzielany jest do tylko jednego stadium,
- alternatywne marszrut montażu, w przypadku których każdy typ operacji przydzielany jest do co najmniej jednego stadium.

Budowany harmonogram montażu ma być jak najkrótszy. W jego budowie należy uwzględnić planowane przestoje maszyn, do których należą m.in. remonty, przebrojenia, konserwacje. Schemat blokowy jednopoziomowej koncepcji rozwiązania opisanego zadania zaprezentowano na rys. 2.



Rys. 2. Schemat blokowy monolitycznej metody harmonogramowania montażu

Fig. 2. Block diagram of the monolithic method of assembly scheduling

Do danych wejściowych należą parametry opisujące linię montażową z maszynami równoległymi, a także wielowariantowe produkty. W związku z uwzględnieniem planowanych przestojów maszyn wskazane jest oszacowanie obciążeń stadiów. Można w tym celu zastosować np. procedurę opisaną w pracy [3], zbudowaną przez autora artykułu w celu wyznaczenia liczby uwzględnianych przedziałów czasowych na które podzielona jest długość harmonogramu. W przypadku każdego z przedziałów czasowych określona jest dostępność poszczególnych

maszyn. Dane wejściowe uwzględniane są w rozwiązywanym zadaniu równoczesnego rozdziału operacji w czasie i w przestrzeni – wyznaczany jest harmonogram montażu wielowariantowych produktów. Dokonywany jest również rozdział podajników części pomiędzy poszczególne stadia.

W celu rozwiązania opisanego zadania zbudowane zostały liniowe modele matematyczne zadań programowania całkowitoliczbowego: M1 – w przypadku sztywnych marszrut montażu, M2 – w przypadku alternatywnych

marszrut montażu. Matematycznemu opisowi rozwiązywanego problemu poświęcony jest następny rozdział.

### Matematyczny opis zadania harmonogramowania montażu

W celu rozwiązania opisanego w poprzednim rozdziale problemu zbudowane zostały modele matematyczne zadań programowania całkowitoliczbowego. W tab. 1 zestawiono wykaz oznaczeń zbiorów, parametrów i zmiennych, które uwzględniono w tych modelach.

Tabela 1. Tabela zestawienia oznaczeń zbiorów, parametrów i zmiennych  
Table 1. Tabulation summary of sets, parameters and variables

Podstawowe zbiory:	
$I$	– zbiór maszyn montażowych: $I = \{1, \dots, M\}$ ;
$J$	– zbiór typów operacji montażowych: $J = \{1, \dots, N\}$ ;
$K$	– zbiór typów montowanych produktów: $K = \{1, \dots, T\}$ ;
$L$	– zbiór przedziałów czasowych: $L = \{1, \dots, H\}$ ;
$S$	– zbiór indeksów produktów;
$V$	– zbiór stadiów: $V = \{1, \dots, \vartheta\}$ ;
Pozostałe zbiory:	
$J^C$	– zbiór operacji montażowych wymagających wykorzystania podajnika części, $J^C \subset J$ ;
$J^1$	– zbiór operacji podstawowych, $J^1 \subset J$ ;
$J^2$	– zbiór operacji dodatkowych (różnicujących produkty), $J^2 \subset J$ ;
$O^1$	– zbiór par $(k, j)$ , w których operacja podstawowa $j \in J^1$ jest wykonywana dla produktu typu $k \in K$ ;
$O^2$	– zbiór par $(s, j)$ , w których operacja dodatkowa $j \in J^2$ jest wykonywana dla produktu $s \in S$ ;
$R^1$	– zbiór uporządkowanych trójek $(k, r, j)$ , w których kolejno wykonywane operacje podstawowe $r, j \in J^1$ dotyczą produktu typu $k$ ;
$R^2$	– zbiór uporządkowanych trójek $(s, r, j)$ , w których kolejno wykonywane operacje $r, j \in J$ dotyczą produktu $s$ , w przypadku których co najmniej jedna operacja należy do zbioru $J^2$ ;
$T$	– zbiór uporządkowanych par $(s, k)$ , w których produkt o indeksie $s$ jest typu $k$ ;
$V_j$	– zbiór stadiów zawierających maszyny zdolne do wykonania operacji $j \in J$ ;
$Z$	– zbiór uporządkowanych par $(i, v)$ , takich, że maszyna $i$ należy do stadium $v$ ;
Parametry:	
$a_{vj}$	– przestrzeń robocza maszyny umieszczonej w stadium $v$ wymagana dla wykonania operacji $j$ ;
$b_v$	– przestrzeń robocza maszyny umieszczonej w stadium $v$ , w której mogą być umieszczone podajniki;
$d_v$	– pojemność bufora międzyoperacyjnego umieszczonego przed stadium $v$ ;
$g_{ev}$	– czas transportu produktu pomiędzy maszynami umieszczonymi w stadiach $e$ oraz $v$ ;
$m_v$	– liczba maszyn umieszczonych w stadium $v$ ;
$p_{jk}^1$	– czas wykonywania operacji podstawowej $j \in J^1$ dla produktu typu $k$ ;
$p_{js}^2$	– czas wykonywania operacji dodatkowej $j \in J^2$ dla produktu $s$ ;
$\mu_{il}$	= 1, jeżeli maszyna $i$ jest dostępna w przedziale czasowym $l$ , inaczej $\mu_{il} = 0$ ;
$\rho_v$	– pojemność bufora międzyoperacyjnego umieszczonego przed stadium $v$ ;
Zmienne:	
$q_{ijsl}$	= 1, jeżeli w przedziale czasowym $l$ operacja $j$ dotycząca produktu $s$ wykonywana jest na maszynie $i$ ; inaczej $q_{ijsl} = 0$ ;
$w_{is}$	– czas rozpoczęcia wykonywania operacji dotyczących produktu $s$ na maszynie $i$ ;
$x_{vj}$	= 1, jeżeli operację $j$ przydzielono do maszyny w stadium $v$ , inaczej $x_{vj} = 0$ ;
$y_{vsl}$	= 1, jeżeli w przedziale czasowym $l$ produkt $s$ znajduje się w buforze międzyoperacyjnym umieszczonym przed stadium $v$ , inaczej $y_{vsl} = 0$ ;
$z_{is}$	– czas zakończenia wykonywania operacji dotyczących produktu $s$ na maszynie $i$ ;

Tabela 1 umożliwia matematyczny opis relacji dotyczących wielowariantowych produktów. Zbiór  $T$  zawierający pary  $(s, k)$  określa przyporządkowanie produktów  $s$  poszczególnym typom produktów  $k$ . Dla przykładu niech będą montowane 3 warianty  $(s = 1, 2, 3)$  produktu  $k = 1$ . W takim przypadku  $T = \{(1, 1), (2, 1), (3, 1)\}$ . W przypadku wszystkich wariantów produktu  $k = 1$  należy wykonać operacje podstawowe należące do zbioru  $J^1 = \{1, 2, 3, 4\}$  oraz operacje różnicujące produkty przypisane zbiorowi operacji dodatkowych  $J^2 = \{5, 6, 7\}$ . Kolejność wykonywania operacji (sekwencja montażowa) jest następująca: w przypadku produktu  $s = 1$ : 3, 2, 1, 4, 5, w przypadku produktu  $s = 2$ : 3, 2, 1, 4, 6, 5, a w przypadku produktu  $s = 3$ : 3, 2, 1, 4, 7, 5. Przypisanie operacji podstawowych

produktowi jest znane dzięki zbiorowi  $O^1 = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4)\}$ , a dodatkowe operacje są uwzględnione w zbiorze  $O^2 = \{(1, 5), (2, 5), (2, 6), (3, 7)\}$ . Zbiory ograniczeń kolejnościowych mają postać:  $R^1 = \{(1, 3, 2), (1, 2, 1), (1, 2, 4)\}$ ,  $R^2 = \{(1, 4, 5), (2, 4, 6), (2, 6, 5), (3, 4, 7), (3, 7, 5)\}$ .

Zmienne  $w_{is}$  oraz  $z_{is}$ , zdefiniowane w tab. 1 to zmienne pomocnicze. Wykorzystywane one są w relacjach matematycznych, dotyczących wykorzystania buforów międzyoperacyjnych. Jeżeli maszyna  $i$  nie jest obciążona przez produkt  $s$ , to  $w_{is} = z_{is} = 0$ .

Modele matematyczne M1 (sztywne marszruty) i M2 (alternatywne marszruty):

Zminimalizować: 
$$\sum_{l \in L} \sum_{s \in S} \left( \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} l q_{ijsl} + \sum_{v \in V} y_{vsl} \right) \quad (1)$$

przy ograniczeniach: 
$$\sum_{i \in I} \sum_{j \in J} q_{ijsl} \leq 1; \quad l \in L; s \in S \quad (2)$$

$$\sum_{j \in J} \sum_{s \in S} q_{ijsl} \leq \mu_{ij}; \quad i \in I; l \in L \quad (3)$$

$$\sum_{i \in I} \sum_{l \in L; \mu_{ij}=1} q_{ijsl} = p_{jk}^1; \quad j \in J^1; (s, k) \in T; (k, j) \in O^1 \quad (4)$$

$$\sum_{i \in I} \sum_{l \in L; \mu_{ij}=1} q_{ijsl} = p_{js}^2; \quad j \in J^2; s \in S; (s, j) \in O^2 \quad (5)$$

$$q_{\tau r s f} + q_{i j s l} \leq 1; \quad (\tau, v), (i, v) \in Z; r, j \in J; f, l \in L; s \in S; r \neq j; \tau \neq i \quad (6)$$

$$q_{i j s l} + q_{\tau j s f} \leq 1; \quad \tau, i \in I; j \in J; l, f \in L; s \in S; \tau \neq i \quad (7)$$

$$x_{vj} \geq q_{ijsl}; \quad (i, v) \in Z; j \in J; l \in L; s \in S \quad (8)$$

$$a_{vj} x_{vj} \leq b_v m_v; \quad i \in I; j \in J^c \quad (9)$$

$$x_{vj} = 0; \quad v \notin V_j; j \in J \quad (10)$$

$$\sum_{v \in V_j} x_{vj} = 1; \quad j \in J \quad \text{– tylko w przypadku modelu M1} \quad (11)$$

$$i q_{ijsl} \geq \tau q_{\tau r s f} - (H + 1)(1 - q_{ijsl}); \quad i, \tau \in I; (s, k) \in T; l, f \in L; (k, r, j) \in R^1 \vee (s, r, j) \in R^2 \quad (12)$$

$$l q_{ijsl} - f q_{\tau r s f} \leq \sum_{\eta \in L; f < \eta < l} (q_{ij s \eta} + q_{i r s \eta}) + 1 + (H + 1)(1 - q_{ijsl});$$

$$i, \tau \in I; (s, k) \in T; l, f \in L; (k, r, j) \in R^1 \vee (s, r, j) \in R^2 \quad (13)$$

$$l q_{ijsl} - f q_{\tau r s f} \geq 1 + g_{ev} - (H + 1)(1 - q_{ijsl});$$

$$(i, v), (\tau, e) \in Z; f, l \in L; ((s, k) \in T; (\kappa, r, j) \in R^1; \kappa = k) \vee (s, r, j) \in R^2 \quad (14)$$

$$w_{is} \geq l q_{ijsl} - \sum_{f \in L} \sum_{r \in I} q_{\tau r s f} + 1 - (H + 1)(1 - q_{ijsl}); \quad i \in I; j \in J; l \in L; s \in S \quad (15)$$

$$w_{is} \leq l q_{ijsl} + (H + 1)(1 - q_{ijsl}); \quad i \in I; j \in J; l \in L; s \in S \quad (16)$$

$$z_{is} \geq lq_{ijsl} - (H+1)(1-q_{ijsl}); \quad i \in I; j \in J; l \in L; s \in S \quad (17)$$

$$lq_{ijsl} - fq_{trsf} - 1 \leq g_{ev} \sum_{\delta \in L: f < \delta < l} (q_{ijs\delta} + q_{trs\delta}) + \sum_{\delta \in L} y_{vs\delta} + (1+H)(1-q_{trsf});$$

$$(i, v), (\tau, e) \in Z; e < v; (s, k) \in T; f, l \in L; f < l; (k, r, j) \in R^1 \vee (s, r, j) \in R^2 \quad (18)$$

$$ly_{vsl} \geq z_{\tau s} + 1 + g_{ev} - (H+1)(1-y_{vsl}); \quad (\tau, e) \in Z; v \in V; l \in L; s \in S; e < v \quad (19)$$

$$ly_{vsl} \leq w_{is} - 1 + (H+1)(1-y_{vsl}); \quad (i, v) \in Z; l \in L; s \in S \quad (20)$$

$$\sum_{s \in S} y_{vsl} \leq d_v; \quad l \in L; v \in V; v > 1 \quad (21)$$

$$q_{ijsl}, y_{vsl} \in \{0, 1\}; w_{is}, z_{is} \geq 0; \quad i \in I; j \in J; l \in L; s \in S; v \in V \quad (22)$$

Funkcja celu (1) służy do budowy jak najkrótszych harmonogramów montażu – zapewnia ona wykonywanie operacji montażowych w przedziałach czasowych o jak najmniejszych indeksach. Funkcja ta ma również wpływ na wykorzystanie buforów międzyoperacyjnych. W przypadku możliwości utworzenia kilku harmonogramów o takich samych długościach, wybierany jest ten, który gwarantuje najmniejsze obciążenie buforów. Poszczególne ograniczenia, dotyczące modeli M1 i M2, zapewniają: (2) – wykonywanie w danej chwili co najwyżej jednej operacji montażowej dotyczącej danego produktu wielowariantowego, (3) – wykonywanie przez maszynę co najwyżej jednej operacji w danej chwili – w okresie dostępności maszyny, (4) i (5) – rozdział wszystkich operacji podstawowych (4) oraz dodatkowych (5) pomiędzy maszyny montażowe, (6) – eliminację rozdziału operacji dotyczących danego produktu pomiędzy różne maszyny, należące do tego samego stadium – operacje te wykonywane są na jednej maszynie w określonym stadium, (7) – niepodzielność operacji montażowej pomiędzy maszyny, (8) – wyznaczenie przydziału typów operacji do poszczególnych stadiów, umożliwiającego rozdział podajników części, z których pobierane są części składowe i domontowywane do uprzednio zmontowanych części, (9) – weryfikację ograniczonej przestrzeni roboczej maszyny montażowej – limitowanie rozmieszczanych podajników części, (10) – eliminację przydziałów operacji do niewłaściwych stadiów, (11) – sztywność marszrut montażu – dotyczy wyłącznie modelu M1, (12) – jednokierunkowość przepływu produktów przez linię montażową, (13) – ciągłość każdej operacji montażowej, (14) – wykonywanie operacji zgodnie z danymi sekwencjami montażowymi, (15) i (16) – wyznaczenie czasu rozpoczęcia wykonywania na danej maszynie operacji montażowych dotyczących danego produktu, (17) – wyznaczenie czasu zakończenia wykonywania operacji (przyporządkowanych danemu produktowi) na określonych maszynach, (18) – wyznaczenie liczby przedziałów czasowych, w których produkt ma przebywać w buforze, (19) – umieszczenie produktu w odpowiednim buforze po wykonaniu poprzedniej operacji oraz dzięki (20) – przed

wykonaniem następnego operacji i rezerwację czasu na transport produktu, (21) – weryfikację ograniczonej pojemności buforów międzyoperacyjnych, (22) – odpowiednie typy zmiennych.

#### Weryfikacja metody

Metoda została zweryfikowana za pomocą eksperymentów obliczeniowych. W tym celu przygotowano 4 grupy testowych zadań. W przypadku każdej z grup rozwiązano 30 zadań. Modele matematyczne zakodowano w języku AMPL (A Modelling Language for Mathematical Programming) [1]. Do obliczeń wykorzystano pakiet optymalizacji dyskretnej GNU *Linear Programming Kit* (GLPK), a także GUROBI [9]. Dane dotyczyły sprzętu wykorzystywanego w gospodarstwie domowym. Produkty montowane były wzdłuż jednej osi (tzw. produkty jednoosiowe). Produkty danego typu różniły się m.in. obudową, mocą silnika, gabarytem uchwytu). Uwzględniono rzeczywiste czasy wykonywania operacji montażowych. Ograniczenia technologiczne były wzięte pod uwagę w zdefiniowanych w tab. 1 zbiorach dotyczących kolejności wykonywania operacji montażowych. Eksperymenty obliczeniowe umożliwiły porównanie długości harmonogramów dotyczących sztywnych oraz alternatywnych marszrut montażu. W tym celu zdefiniowano w równaniu (23) wskaźnik  $\alpha$ .

$$\alpha = \frac{C_{\max}^{M1} - C_{\max}^{M2}}{C_{\max}^{M2}} \cdot 100\%, \quad (23)$$

gdzie  $C_{\max}^r = \max_{i \in I, j \in J, s \in S, l \in L} lq_{ijsl}; r \in \{M1, M2\}$

Parametry grup zadań testowych oraz wyniki eksperymentów zestawiono w tab. 2.

Eksperymenty obliczeniowe potwierdziły, że trudniej zrównoważyć obciążenia maszyn w przypadku sztywnych marszrut montażu niż uwzględniając marszrut alternatywne. Skutkiem tego było wyznaczenie dłuższych harmonogramów przy zastosowaniu marszrut alternatywnych, w porównaniu do marszrut alternatywnych

Tabela 2. Parametry grup zadań testowych i wyniki eksperymentów obliczeniowych [%]

Table 2. Parameters of groups of tasks and results of computational experiments [%]

Grupa zadań	Parametry grupy zadań						Średnia wartość $\alpha$	Liczby: $\vartheta$ – stadiów, $M$ – maszyn, $N$ – typów operacji montażowych, $W$ – typów produktów, $S$ – produktów, $H$ – przedziałów czasowych.
	$\vartheta$	$M$	$N$	$W$	$S$	$H$		
1	2	4	10	3	6	16	4,1	
2	2	6	12	4	8	18	4,9	
3	3	6	14	5	10	20	7,1	
4	3	8	16	5	10	25	7,9	

– nawet o ok. 8%, co potwierdzają średnie wartości wskaźnika  $\alpha$  zestawione w tab. 2.

Porównano również opracowaną metodę z metodą hierarchiczną harmonogramowania montażu produktów wielowariantowych, którą zaprezentowano w pracy [3]. Wyznaczano o 6–9% krótsze harmonogramy za pomocą zaprezentowanej metody jednopoziomowej niż w przypadku zastosowania koncepcji dwupoziomowej.

#### Uwagi końcowe

Najważniejszą zaletą opracowanej metody jest możliwość wyznaczania rozwiązań optymalnych – najkrótszych harmonogramów montażu produktów. Zostało to osiągnięte dzięki zastosowaniu programowania całkowitoliczbowego (PC). Bardzo szybki rozwój mocy obliczeniowych i jej parametrów, zauważony m.in. w pracy [2], sprzyja stosowaniu PC.

Należy również podkreślić uwzględnienie produktów wielowariantowych w przedstawionej metodzie. W tym celu zbudowano strukturę danych i zmiennych dotyczącą tych produktów, która następnie została wykorzystana w zbudowanych modelach matematycznych. Ta struktura, obejmująca m.in. operacje podstawowe i dodatkowe (różnicujące różne warianty produktów), korzystnie wpływa na złożoność obliczeniową rozwiązywanych zadań.

Wzięto pod uwagę planowane przestoje maszyn, dzięki czemu uwzględniono m.in. planowane remonty, przebrojenia, konserwacje. Kolejnym aspektem, potwierdzającym dążenie do jak najlepszego odzwierciedlenia rzeczywistości, jest wyróżnienie zbioru operacji wymagających wykorzystania podajników części. Dzięki temu rozrózono operacje polegające na domontowaniu części pobieranych z podajników od pozostałych operacji (np. spawanie, zgrzewanie, klejenie).

W przypadku mniej złożonej konfiguracji linii montażowej – bez maszyn równoległych – można zastosować modele matematyczne i procedurę oszacowania obciążeń maszyn zaprezentowane w pracy [4], których dotyczy mniejsza liczba parametrów i ograniczeń w porównaniu do modeli zaprezentowanych w niniejszym artykule.

Podjęcie monolityczne do harmonogramowania montażu wymaga równoczesnego uwzględnienia wielu indeksów, parametrów i zmiennych w modelach matematycznych. Skutkuje to znacznymi rozmiarami rozwiązywanych zadań i czasochłonnością obliczeń. Zbudowane modele matematyczne mogą stanowić podstawę do budowy algorytmów przybliżonych, np. heurystyk relaksacyjnych, przeznaczonych do rozwiązywania w krótkim czasie problemów o relatywnie znacznych rozmiarach.

#### LITERATURA

- [1] Fourer R., D. Gay, B. Kernighan. 2003. "AMPL, A Modelling Language for Mathematical Programming". Duxbury Press, Pacific Grove, CA.
- [2] Łunarski J. 2016. „Znaczenie informacji w procesach produkcyjnych”. *Technologia i Automatykacja Montażu* (4): 4–5.
- [3] Magiera M. 2016. „Hierarchiczna metoda planowania przepływów wielowariantowych produktów przez linie produkcyjne” [w:] „Automatykacja procesów dyskretnych. Teoria i zastosowania”, pod red. Świerniaka A., J. Krystek, Gliwice: Wydawnictwo Pracowni Komputerowej Jacka Skalmierskiego, tom I: 171–183.
- [4] Magiera M. 2017. „Monolityczna metoda planowania montażu dotyczącego wielowariantowego sprzętu elektrycznego i elektronicznego”. *Przegląd Elektrotechniczny* (w druku).
- [5] Magiera M. 2016. „Wybrane metody planowania przepływów produktów przez linie produkcyjne i łańcuchy dostaw”. Kraków: Wydawnictwa AGH.
- [6] Pindeo M.L. 2008. "Scheduling. Theory, Algorithms, and Systems". New York: Springer.
- [7] Sawik T. 1999. "Production Planning and Scheduling in Flexible Assembly Systems". Berlin: Springer-Verlag.
- [8] Schneeweiss Ch. 1999. "Hierarchies in Distributed Decision Making". Berlin: Springer-Verlag.
- [9] www.gurobi.com (Gurobi Optimizer, dostęp 12.2016 r.).

dr inż. Marek Magiera – AGH Akademia Górniczo-Hutnicza w Krakowie, Katedra Badań Operacyjnych, al. A. Mickiewicza 30, 30-059 Kraków, e-mail: mmagiera@zarz.agh.edu.pl